



Métodos Numéricos

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina
Professor Agnelo Denis Vieira

Zeros de funções - métodos iterativos

Para determinação do zero (raiz) de uma função, os métodos (iterativos) de ponto fixo (Newton e Secante) consistem em representar a função na forma:

$$f(x) = g(x) - x$$

onde $g(x)$ é denominada função de iteração para $f(x) = 0$

Com base em uma estimativa " x_k " da raiz da função é determinada uma nova estimativa como

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

Os métodos de Newton e da Secante fornecem uma função $g(x)$ que garante a convergência da sequência, de forma que partindo de uma aproximação inicial x_0 para a raiz de $f(x)$ é possível gerar uma sequência $\{x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n-1} \ x_n = \xi\}$ de aproximações para a raiz pela relação $x_{k+1} = g(x_k)$ tal que, quando ocorrer a convergência, $x_{n-1} = x_n = \xi = g(x_{n-1} = \xi)$ e assim $f(x_n = \xi) = g(x_n) - x_n = 0$

Resolução de Sistemas Lineares

Métodos Iterativos – Introdução

- Dado um sistema $Ax = b$, um método é iterativo quando a cada iteração fornece uma aproximação da solução $x = [x_1, x_2, x_3 \dots, x_n]^T$, onde n é o número de incógnitas
- A execução do método gera uma sequência de aproximações $\{x^{(k)}\} = \{x^0, x^1, x^2, \dots, x^k\}$.
- Cada uma das aproximações $x^{(k)}$ é obtida das anteriores pela repetição do mesmo procedimento.
- Os métodos eliminação de Gauss, fatoração LU e fatoração de Cholesky necessitam de diversas etapas, mas apenas ao final do método é obtido o vetor solução, portanto não são considerados métodos iterativos.

Resolução de Sistemas Lineares

Métodos Iterativos – Introdução

- É bastante comum encontrar sistemas lineares que envolvem uma grande porcentagem de coeficientes nulos. Esses são chamados de sistemas esparsos. Para esse tipo de sistemas, os métodos eliminação de Gauss, fatoração LU e fatoração de Cholesky não são os mais apropriados, pois eles não preservam a esparsidade, ou seja, nas posições da matriz A que eram originalmente nulas são introduzidos valores não-nulos. Na etapa final para determinação das incógnitas a esparsidade da matriz facilita a resolução do sistema.
- Métodos iterativos são mais econômicos no que tange a memória dos computadores
- Nos métodos eliminação de Gauss, fatoração LU e fatoração de Cholesky os erros de arredondamento são acumulados a cada etapa, e influenciam a solução final. Nos métodos iterativos, apenas os erros de arredondamento da última iteração afetam a solução final.

Resolução de Sistemas Lineares

Métodos Iterativos – Algoritmo

- Escrever o sistema $Ax = b$, na forma equivalente

$$x = Fx + d \quad (\text{ou } x = Cx + g)$$

(este é o mesmo princípio utilizado nos métodos de ponto fixo (Newton e Secante) para determinação de zero de funções)

a determinação de F e d (C e g) depende do método usado (Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel), sempre a partir de A e b .

- Escolher uma aproximação inicial $x^{(0)}$.
- Começando com $x^{(0)}$, gerar uma sequência de aproximações $\{x^k\}$ de forma iterativa através de

$$x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + d$$

fazendo $x^{(1)} = Fx^{(0)} + d$, $x^{(2)} = Fx^{(1)} + d$ e assim sucessivamente.

Resolução de Sistemas Lineares

Métodos Iterativos – Algoritmo

Quando Parar?

- Se a aproximação $x^{(k)}$ estiver suficientemente próximo de $x^{(k-1)}$ paramos o processo.

a) $\max(|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|) < \varepsilon$, com i de 1 até n

b) distância Euclidiana entre $x^{(k+1)}$ e $x^{(k)}$ for reduzida

$$\sqrt{(x_1^{k+1} - x_1^k)^2 + (x_2^{k+1} - x_2^k)^2 + \dots + (x_n^{k+1} - x_n^k)^2} < \varepsilon$$

- Se a norma do resíduo for reduzida: $|\text{Resíduo}| < \varepsilon$
- Se o número máximo de iterações tiver sido alcançado

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi

Seja um sistema com n variáveis e n equações

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

pode-se isolar as variáveis na "diagonal principal", resultando em n equações


$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 - (a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ a_{22}x_2 = b_2 - (a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n) \\ \dots \\ a_{nn}x_n = b_n - (a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \left[\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \right] \\ x_2 = \left[\frac{b_2}{a_{22}} - \frac{(a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n)}{a_{22}} \right] \\ \dots \\ x_n = \left[\frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{(a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1})}{a_{nn}} \right] \end{cases}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi

Seja $x^{(0)}$ uma aproximação inicial para a solução deste sistema .

Determina-se a segunda aproximação $x^{(1)}$, da sequência $\{x^{(k)}\}$ a partir de $x^{(0)}$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - 0x_1^{(0)} - a_{12}x_2^{(0)} - \dots - a_{1n}x_n^{(0)}] \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - 0x_2^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)} - \dots - a_{2n}x_n^{(0)}] \\ \dots \\ x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}} [b_n - a_{n1}x_1^{(0)} - a_{n2}x_2^{(0)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(0)} - 0x_n^{(0)}] \end{array} \right. \quad x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi

Determina-se a aproximação $x^{(k+1)}$ da sequência $\{x^{(k)}\}$ a partir de $x^{(k)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - 0x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}] \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - 0x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}] \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} [b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} - 0x_n^{(k)}] \end{array} \right.$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi – Formulação matricial

O conjunto de n equações pode ser representado na forma $x = Fx + d$

$$\begin{cases} x_1 = \left[\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \right] \\ x_2 = \left[\frac{b_2}{a_{22}} - \frac{(a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n)}{a_{22}} \right] \\ \dots \\ x_n = \left[\frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{(a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1})}{a_{nn}} \right] \end{cases} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}}_d + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_{12}x_2}{a_{11}} & \dots & \frac{-a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}x_1}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{-a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-a_{n1}x_1}{a_{nn}} & \dots & \frac{-a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix}}_{Fx}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \dots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi - Formulação não-matricial

Equação geral

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi – Critério de Convergência das linhas

Critério das linhas.

Dado o sistema $Ax = b$,

considerando cada linha (i) da matriz A,

$$\alpha_i = \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right) / |a_{ii}|$$

então para a matriz A

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} (\alpha_i)$$

Se $\alpha < 1$, então o método de Gauss-Jacobi gera uma série convergente para a solução do sistema independentemente da escolha de $x^{(0)}$.

Neste caso a matriz A é denominada diagonalmente dominante

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi – Critério das linhas – Exemplo

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 1x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Critério das linhas:

$$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = 0,3 < 1 \quad \alpha_2 = \frac{1+1}{5} = 0,4 < 1 \quad \alpha_3 = \frac{2+3}{10} = 0,5 < 1$$

Como $\alpha = \max_{1 \leq i \leq 3} \alpha_i = 0,5 < 1$  **logo, a sequência converge independente do valor x_0 escolhido**