



Métodos Numéricos

Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina
Professor Agnelo Denis Vieira

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel

Da mesma forma que o realizado para o método Gauss-Jabobi

Seja um sistema com n variáveis e n equações

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

pode-se isolar as variáveis na "diagonal principal", resultando em n equações


$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 - (a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ a_{22}x_2 = b_2 - (a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n) \\ \dots \\ a_{nn}x_n = b_n - (a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1 = \left[\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \right] \\ x_2 = \left[\frac{b_2}{a_{22}} - \frac{(a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n)}{a_{22}} \right] \\ \dots \\ x_n = \left[\frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{(a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1})}{a_{nn}} \right] \end{cases}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Tanto o método iterativo Gauss-Jacobi quanto o método iterativo Gauss-Seidel realizam a determinação da aproximação da solução $x^{(k+1)}$ utilizando a aproximação da solução $x^{(k)}$ aplicada na representação do sistema de equações com o isolamento da diagonal principal .

Para determinar $x^{(k+1)}$ o método Gauss-Jacobi utiliza apenas, e na íntegra, a aproximação $x^{(k)}$ (elementos destacados em verde e vermelho)

Para determinar $x^{(k+1)}$ o método Gauss-Seidel utiliza "algumas componentes" da aproximação $x^{(k)}$ (elementos destacados em verde) e "algumas componentes" da própria aproximação $x^{(k+1)}$ (elementos destacados em vermelho)

Gauss-Jacobi

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - 0x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}] \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - 0x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}] \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} [b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} - 0x_n^{(k)}] \end{cases}$$

Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - 0x_1^{(k)} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}] \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - 0x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}] \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} [b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} - 0x_n^{(k)}] \end{cases}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Formulação matricial

Da mesma forma que no método Gauss-Jacobi, onde:

$$x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + d$$

o método Gauss-Seidel pode ter uma formulação matricial, de forma que:

$$x^{(k+1)} = L x^{(k+1)} + U x^{(k)} + d$$

Gauss-Jacobi

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & \dots & -a_{3n}/a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Seidel

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel

$$d = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \dots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ 0 & 0 & -a_{23}/a_{22} & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{3n}/a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Jacobi - Formulação não-matricial

Da mesma forma que no método Gauss-Jacobi, o método Gauss-Seidel pode ter uma formulação não-matricial

Gauss-Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

Nos dois métodos, há dois somatórios envolvendo termos na forma $a_{ij}x_j^k$ e/ou $a_{ij}x_j^{k+1}$. O elemento na diagonal principal da matriz A, ou seja a_{ii} quando $i=j$, não está envolvido no somatório.

O somatório destacado em **vermelho** corresponde aos termos a_{ij} que estão à esquerda do elemento na diagonal principal da matriz A.

O somatório destacado em **verde** corresponde aos termos a_{ij} que estão à direita do elemento na diagonal principal da matriz A.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Critério de Convergência

- Gauss-Jacobi converge para qualquer vetor inicial, se a matriz A é uma matriz diagonal dominante.
- Gauss-Seidel converge para qualquer vetor inicial se A é uma matriz definida positiva.
- A Matrix é definida positiva se $x^T A x > 0$ para todo x diferente do vetor nulo.
- A matriz é definida positiva, se todos os autovalores são positivos.
- Mas o critério a ser adotado para convergência do método Gauss-Seidel será o de SASSENFELD.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Critério de Convergência

Critérios de Convergência;

- 1) Critério das linhas : para o método GAUSS-JACOBI;
- 2) Critério de Sassenfeld : para o método GAUSS-SEIDEL.

Os critérios acima estabelecem condições **suficientes** para a convergência.

Critério de Sassenfeld

Sejam as quantidades β_i dadas por:

$$\beta_1 = \left| \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^n |a_{1j}| \right| \quad \beta_i = \left| \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right] \right|, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad \beta = \max_{1 \leq i \leq n} \{\beta_i\}$$

Se $\beta < 1$ então o método de Gauss-Seidel convergirá independente da aproximação inicial x^0

Quanto menor β , mais rápida é a convergência.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Critério de Sassenfeld

Sejam

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|} = \sum_{i=2}^n \frac{|a_{1i}|}{|a_{11}|}$$

$$\beta_i = \frac{|a_{i1}| \beta_1 + |a_{i2}| \beta_2 + \dots + |a_{ii-1}| \beta_{i-1}}{|a_{ii}|} + \frac{|a_{ii+1}| + \dots + |a_{in}|}{|a_{ii}|}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \beta_j}{|a_{ii}|} + \frac{\sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \{\beta_i\}$$

Se $\beta < 1$ então o método de Gauss-Seidel convergirá independente da aproximação inicial x^0

Quanto menor β , mais rápida é a convergência.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Critério de Convergência de Sassenfeld – Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$i = 1 \quad \beta_1 = \left| \frac{1}{a_{11}} \right| (|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}|)$$

$$i = 2 \quad \beta_2 = \left| \frac{1}{a_{22}} \right| (|a_{21}| \beta_1 + |a_{23}| + |a_{24}|)$$

$$i = 3 \quad \beta_3 = \left| \frac{1}{a_{33}} \right| (|a_{31}| \beta_1 + |a_{32}| \beta_2 + |a_{34}|)$$

$$i = 4 \quad \beta_4 = \left| \frac{1}{a_{44}} \right| (|a_{41}| \beta_1 + |a_{42}| \beta_2 + |a_{43}| \beta_3)$$

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|} = \sum_{i=2}^n \frac{|a_{1i}|}{|a_{11}|}$$

$$\beta_i = \frac{|a_{i1}| \beta_1 + |a_{i2}| \beta_2 + \dots + |a_{ii-1}| \beta_{i-1} + |a_{ii+1}| + \dots + |a_{in}|}{|a_{ii}|}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\beta = \max_{1 \leq i \leq 4} \{\beta_i\}$$

observe que os elementos na diagonal principal de A, ou seja, a_{ij} com $i=j$ não são empregados no numerador da equações

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Critério de Sassenfeld – Exemplo

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 0,2x_3 + 0,2x_4 = 0,4 \\ 0,6x_1 + 3x_2 - 0,6x_3 - 0,3x_4 = -7,8 \\ -0,1x_1 - 0,2x_2 + x_3 + 0,2x_4 = 1 \\ 0,4x_1 + 1,2x_2 + 0,8x_3 + 4x_4 = -10 \end{cases}$$
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -0,2 & 0,2 \\ 0,6 & 3 & -0,6 & -0,3 \\ -0,1 & -0,2 & 1 & 0,2 \\ 0,4 & 1,2 & 0,8 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{2}(1 + 0,2 + 0,2) = 0,7 \\ \beta_2 = \frac{1}{3}(0,6 \times 0,7 + 0,6 + 0,3) = 0,44 \\ \beta_3 = \frac{1}{1}(0,1 \times 0,7 + 0,2 \times 0,44 + 0,2) = 0,358 \\ \beta_4 = \frac{1}{4}(0,4 \times 0,7 + 1,2 \times 0,44 + 0,8 \times 0,358) = 0,2736 \end{cases}$$

$$\beta = \max_{1 \leq i \leq 4} \{\beta_i\} = \max\{0,7; 0,44; 0,358; 0,2736\} = 0,7$$

Como $\beta < 1$, a sequência gerada pelo método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema $Ax = b$.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Exemplo 1

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -21 \\ 15 \end{bmatrix}$$

A matriz dos coeficientes é diagonalmente dominante

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|b - Ax^{(0)}\| = 26,7395$$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{7 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{4} = \frac{7}{4} = 1,75 \\ x_2^{(1)} &= \frac{21 + 4x_1^{(1)} + x_3^{(0)}}{8} = \frac{21 + 4 \times 1,75}{8} = 3,5 \\ x_3^{(1)} &= \frac{15 + 2x_1^{(1)} - x_2^{(1)}}{5} = \frac{15 + 2 \times 1,75 - 3,5}{5} = 3,0 \end{aligned}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,750 \\ 3,500 \\ 3,000 \end{bmatrix}$$

$$\|b - Ax^{(1)}\| = 3,0414$$

$$(GJ: \|b - Ax^{(1)}\| = 10,0452)$$

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Exemplo 1

$$x_1^{(2)} = \frac{7 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}}{4} = \frac{7 + 3,5 - 3}{4} = 1,875$$

$$x_2^{(2)} = \frac{21 + 4x_1^{(2)} + x_3^{(1)}}{8} = \frac{21 + 4 \times 1,875 + 3}{8} = 3,9375$$

$$x_3^{(2)} = \frac{15 + 2x_1^{(2)} - x_2^{(2)}}{5} = \frac{15 + 2 \times 1,875 - 3,9375}{5} = 2,9625$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,8750 \\ 3,9375 \\ 2,9625 \end{bmatrix}$$

$$\|b - Ax^{(2)}\| = 0,4765$$

$$(GJ: \|b - Ax^{(2)}\| = 6,7413)$$

$$x_1^{(3)} = \frac{7 + 3,9375 - 2,9625}{4} = 1,9937$$

$$x_2^{(3)} = \frac{21 + 4 \times 1,9937 + 2,9625}{8} = 3,9921$$

$$x_3^{(3)} = \frac{15 + 2 \times 1,9937 - 3,9922}{5} = 2,9991$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,9937 \\ 3,9921 \\ 2,9991 \end{bmatrix}$$

$$\|b - Ax^{(3)}\| = 0,0408$$

$$(GJ: \|b - Ax^{(3)}\| = 1,9534)$$

Quando ambos Jacobi e Gauss-Seidel convergem, Gauss-Seidel converge mais rápido.

Resolução de Sistemas Lineares

Método Iterativo Gauss-Seidel – Exemplo 2

$$x^{(1)} = Fx^{(0)} + d = \begin{pmatrix} 1,4000 \\ 1,1200 \\ 0,8960 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = Fx^{(1)} + d = \begin{pmatrix} 0,9968 \\ 1,0214 \\ 0,9964 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = Fx^{(2)} + d = \begin{pmatrix} 0,9964 \\ 1,0014 \\ 1,0004 \end{pmatrix}$$

$$x^{(4)} = Fx^{(3)} + d = \begin{pmatrix} 0,9996 \\ 1,0000 \\ 1,0001 \end{pmatrix}$$

$$x^{(5)} = Fx^{(4)} + d = \begin{pmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \\ 1,0000 \end{pmatrix}$$