Métodos numéricos para eng. de produção

Engenharia de Produção - UFPR

Agnelo Denis Vieira

Visão Geral

2019

O conteúdo deste arquivo utiliza exemplos do arquivo:

Introduction to numerical methods

http://nm.mathforcollege.com/topics/ppt_index.html

O conteúdo deste arquivo é abordado no MOOC

Introduction to Numerical Methods - Part 1 of 2

https://www.canvas.net/browse/usflorida/courses/numerical-methods

Introduction to Numerical Methods - Part 2 of 2

https://www.canvas.net/browse/usflorida/courses/intro-numerical-methods-pt2

Muito material (videos, textos, código) é disponível em

Holistic Numerical Methods

Transforming Numerical Methods Education for the STEM Undergraduate

http://mathforcollege.com/nm/#sthash.JJeaclbe.dpbs

Objetivo geral da disciplina

O aluno deverá ser capaz de resolver **problemas de engenharia** através da utilização de **métodos numéricos** com suporte de **recursos computacionais.**

"O **Cálculo Numérico** corresponde a um conjunto de ferramentas ou métodos utilizados para se obter a solução de problemas matemáticos de **forma aproximada**. Esses métodos se aplicam principalmente a problemas que não apresentam uma solução exata, portanto precisam ser resolvidos numericamente". Rodrigo Cristiano Silva - rodrigo@facens.br

Exemplos e justificativas de aplicação em problemas de engenharia

Porque utilizar métodos numéricos?

Para resolver problemas que não podem ser solucionados de forma exata analiticamente

Probabilidade

f(x) função densidade de probabilidade

F(x) função distribuição acumulada

- f(x) $\geq$ 0 para todo x pertencente ao conjunto dos números reais;
- a área sob a curva definida por f(x) é igual a unidade, ou seja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

- a probabilidade de que a variável x assuma algum valor em um intervalo a ≤ x ≤ b é determinada pela área sob f(x), delimitada por a e b, ou seja:

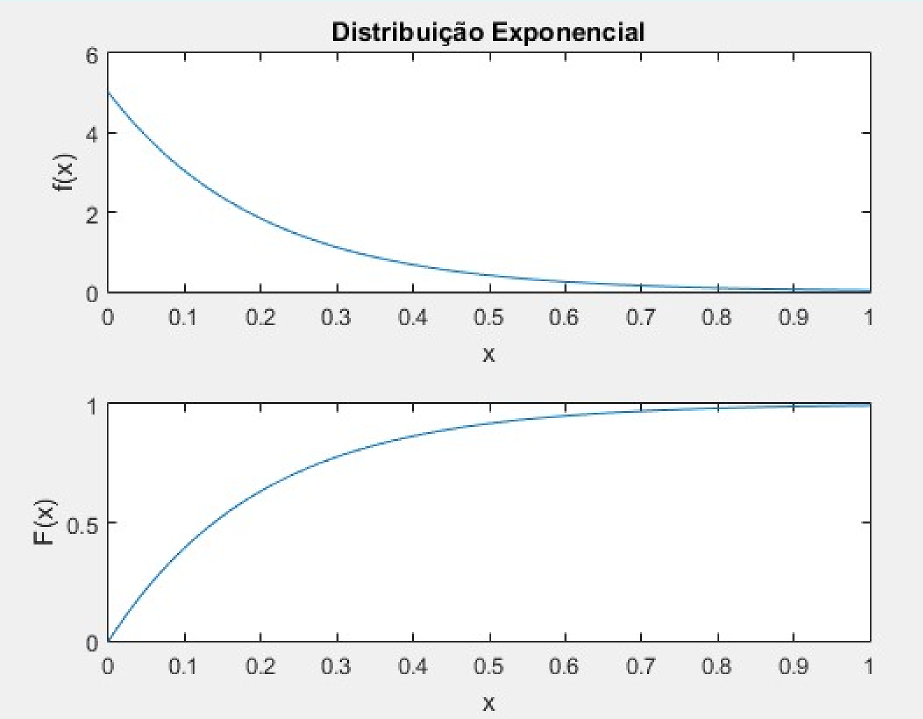
$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

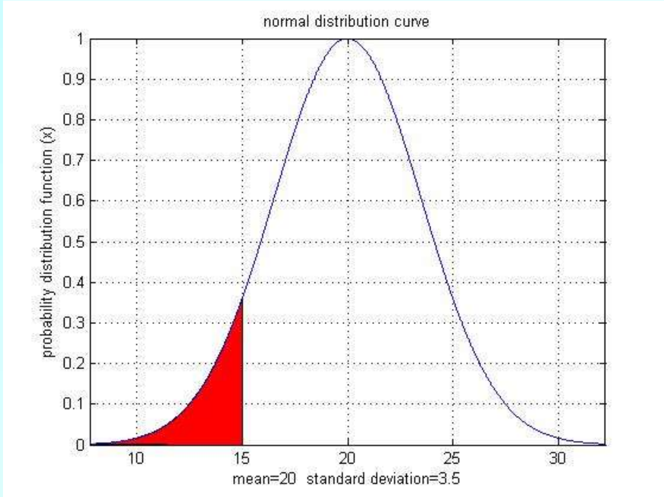
- F(x) especifica a probabilidade de que a variável x assuma algum valor possível menor ou igual ao valor x, F(x) = P(X ≤ x).

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

distribuição exponencial

distribuição normal





IC = $1/\lambda$ (intervalo entre chegadas de clientes em um sistema)
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para x>=0

solução analítica exata
$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

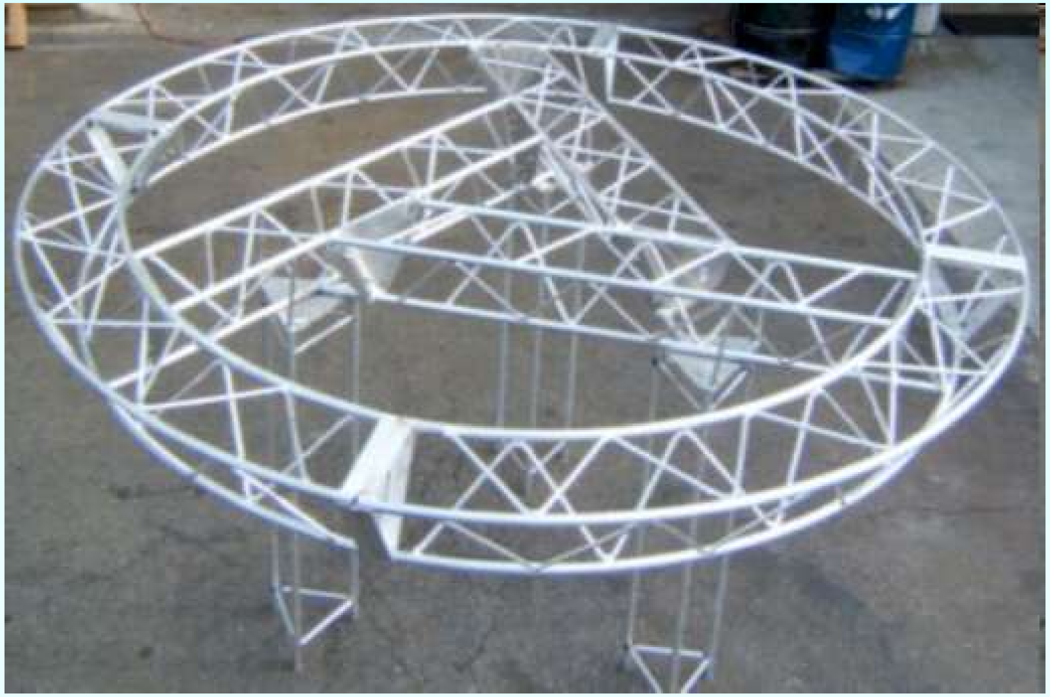
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

não existe solução analítica exata para F(x)
realizar **Integração Numérica**

```
% distribuicao_exponencial                              Código Matlab
% determina f(x) e F(x)
% determina a probabilidade de ocorrência de um valor entre 0,1 e 0,2
% utilizando a integral de f(x) entre 0,1 e 0,2
% utilizando F(x=0,2) - F(x=0,1)
lambda = 5
x = linspace(0,1,101);
f = lambda*exp(-lambda*x);
F = 1 - exp(-lambda*x);
figure(1)
clf
subplot(2,1,1)
plot(x,f)
title('Distribuição Exponencial')
xlabel('x')
ylabel('f(x)')
subplot(2,1,2)
plot(x,F)
xlabel('x')
ylabel('F(x)')

delta_x = x(2) - x(1)
area = 0
x1 = x(11)
x2 = x(21)
% determina a integral numérica entre x1 e x2
for i = 11:(21-1)
   area = ((f(i+1)+f(i))/2) * delta_x + area;
end
area

% determina a probabilidade de ocorrência entre x1 e x2
prob = F(21) - F(11)
```

Porque utilizar métodos numéricos?

Para resolver problemas que são excessivamente complexos/trabalhosos para serem resolvidos analiticamente



How do we solve an engineering problem?

Problem Description

↓

Mathematical Model

↓

Solution of Mathematical Model

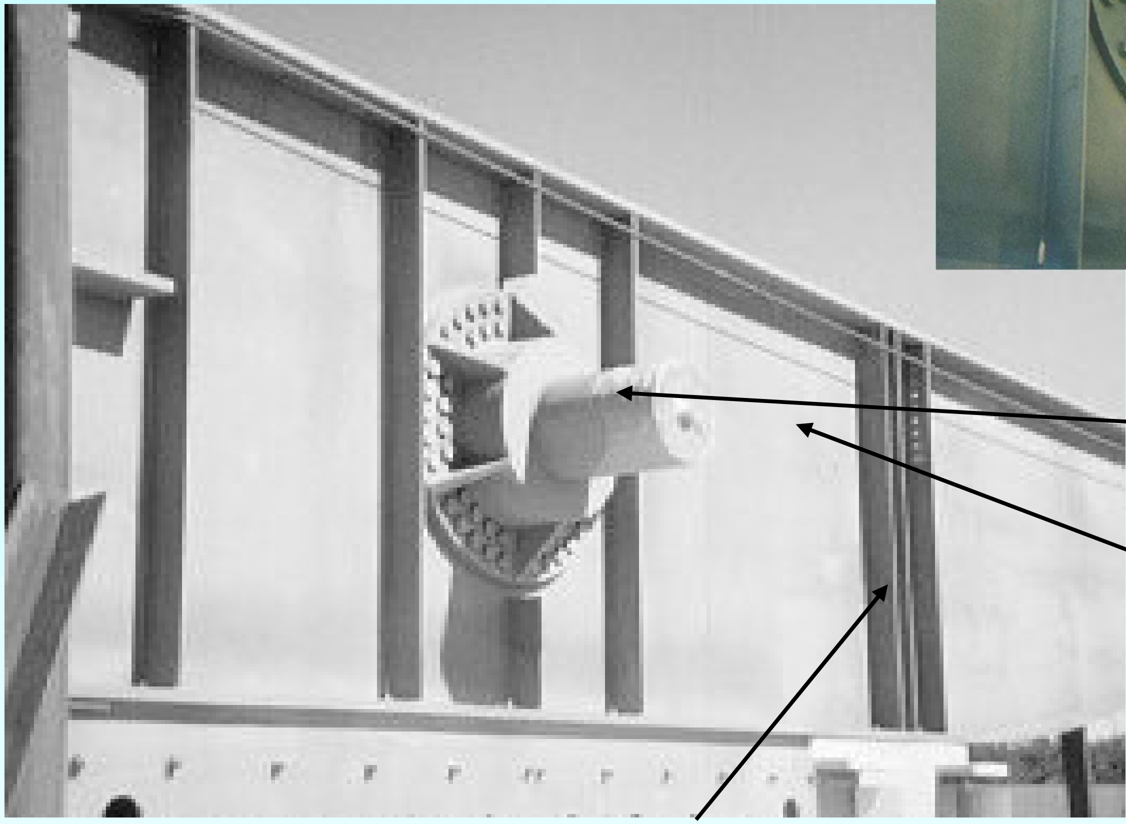
↓

Using the Solution

Example of Solving an Engineering Problem

Bascule Bridge THG

Bascule Bridge THG

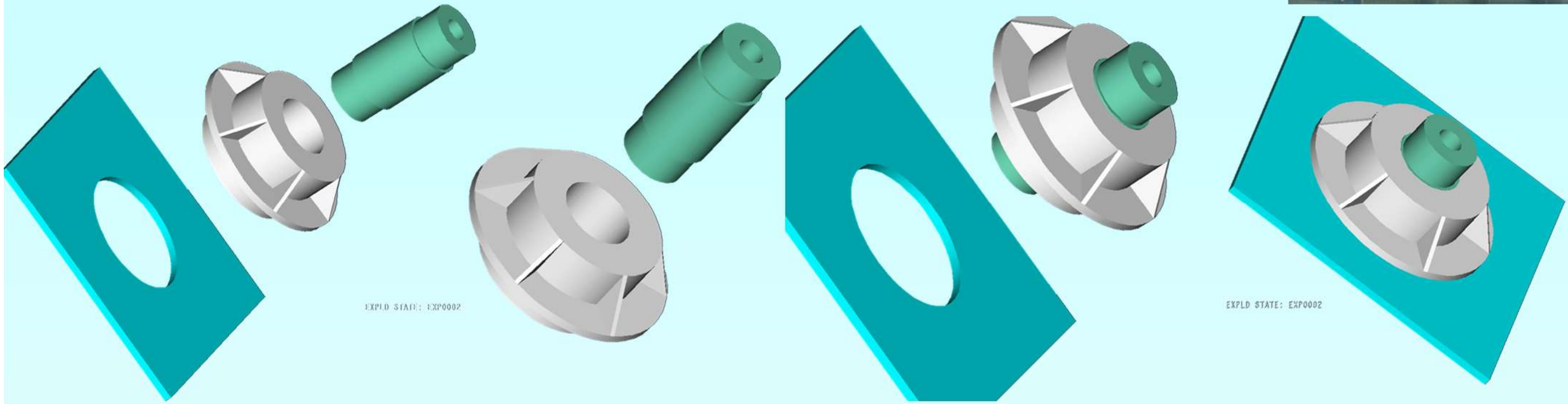


Hub
mancal

Trunnion
eixo de
rotação

Girder
estrutura mecânica da ponte

Trunnion-Hub-Girder Assembly Procedure



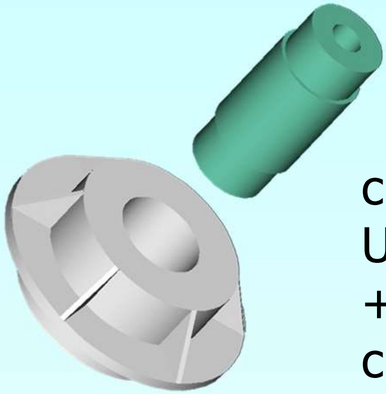
Step1. Trunnion immersed in dry-ice/alcohol

Step2. Trunnion warm-up in hub

Step3. Trunnion-Hub immersed in dry-ice/alcohol

Step4. Trunnion-Hub warm-up into girder

Um problema real que ocorreu na construção de uma ponte na Flórida em 1995



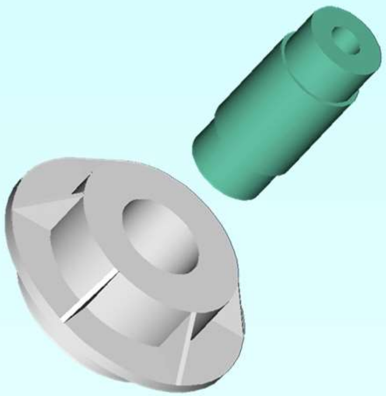
custo do par trunnion-hub
US$ 50.000,00
+
custo de obra parada

After Cooling, the Trunnion Got Stuck in Hub

Coupled with construction delays, the total loss could have been more than a hundred thousand dollars.

Why did it get stuck?

Magnitude of contraction needed in the trunnion was 0.015” or more. Did it contract enough?



eixo Dext = 12.363"
mancal dint = 12.358"

interferência = 0.005"
folga diametral necessária para a montagem > 0.01"
redução diametral necessária = Dext - dint + folga = 0.015"

Modelo matemático utilizado

$$\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T$$

$$D = 12.363''$$

$$\alpha = 6.47 \times 10^{-6} in / in /^{o} F$$ constante

$$\Delta T = -108 - 80 = -188^{o} F$$

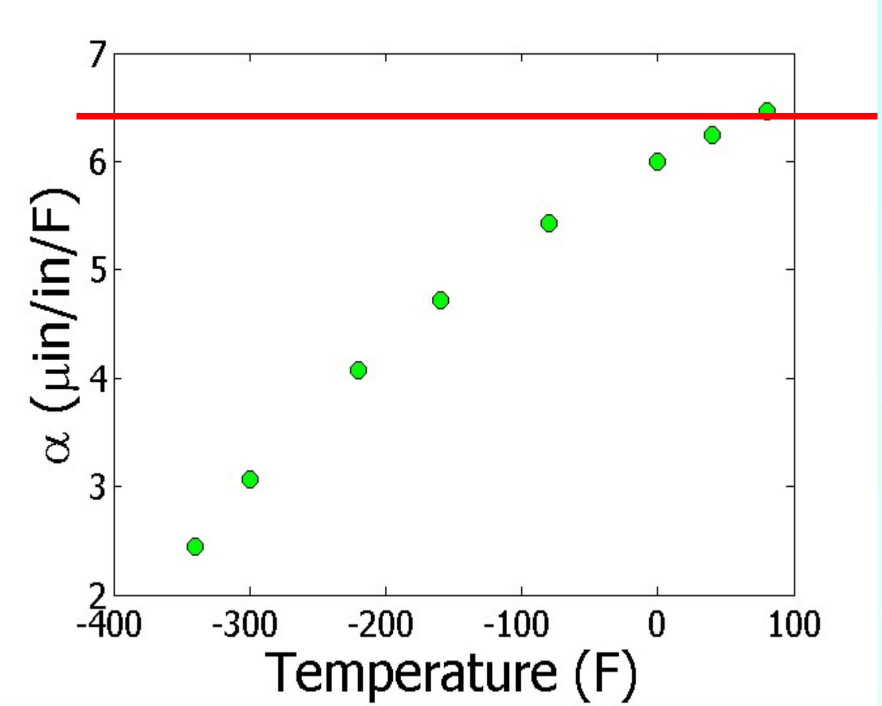
temperatura: ambiente 80°F; gelo seco -108°F

$$\Delta D = (12.363)(6.47 \times 10^{-6})(-188) = -0.01504''$$

0.01504" é mais do que o necessário 0.015" mas não deu certo

Is the formula used correct?

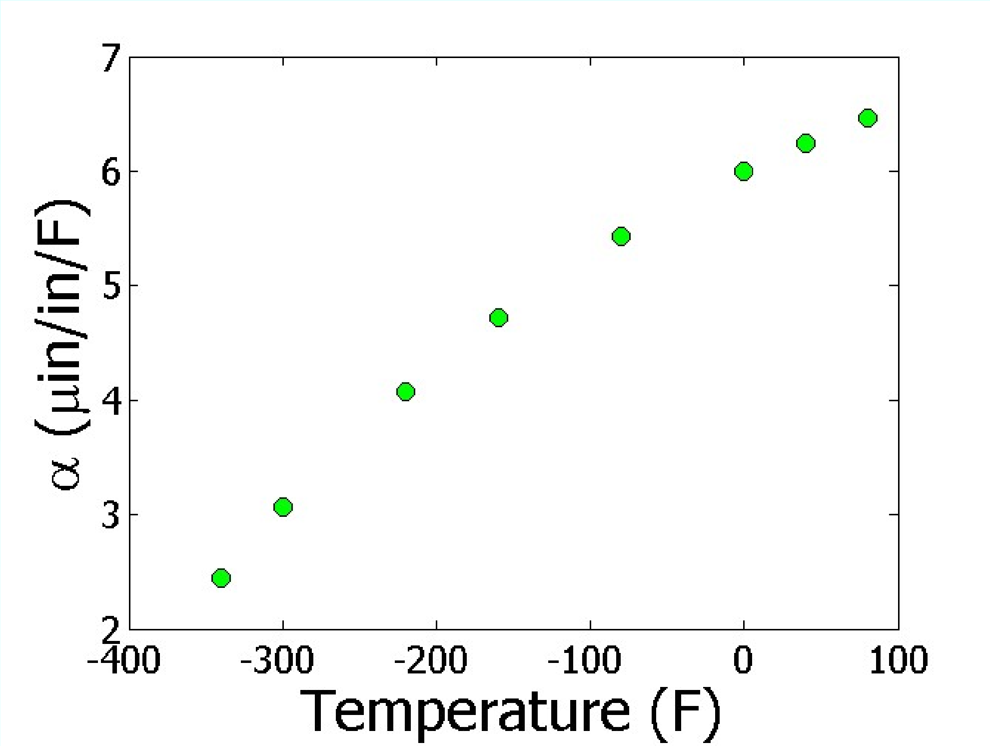
$$\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T$$



T(°F)	α (µin/in/°F)
-340	2.45
-300	3.07
-220	4.08
-160	4.72
-80	5.43
0	6.00
40	6.24
80	6.47

α = 6,47 cte. foi superdimensionado
para a faixa de temperatura, de -108°F a + 80°F
o valor de α é variável e menor do que o valor utilizado

The Correct Model Would Account for Varying Thermal Expansion Coefficient



$$\Delta D = D\int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)\,dT$$

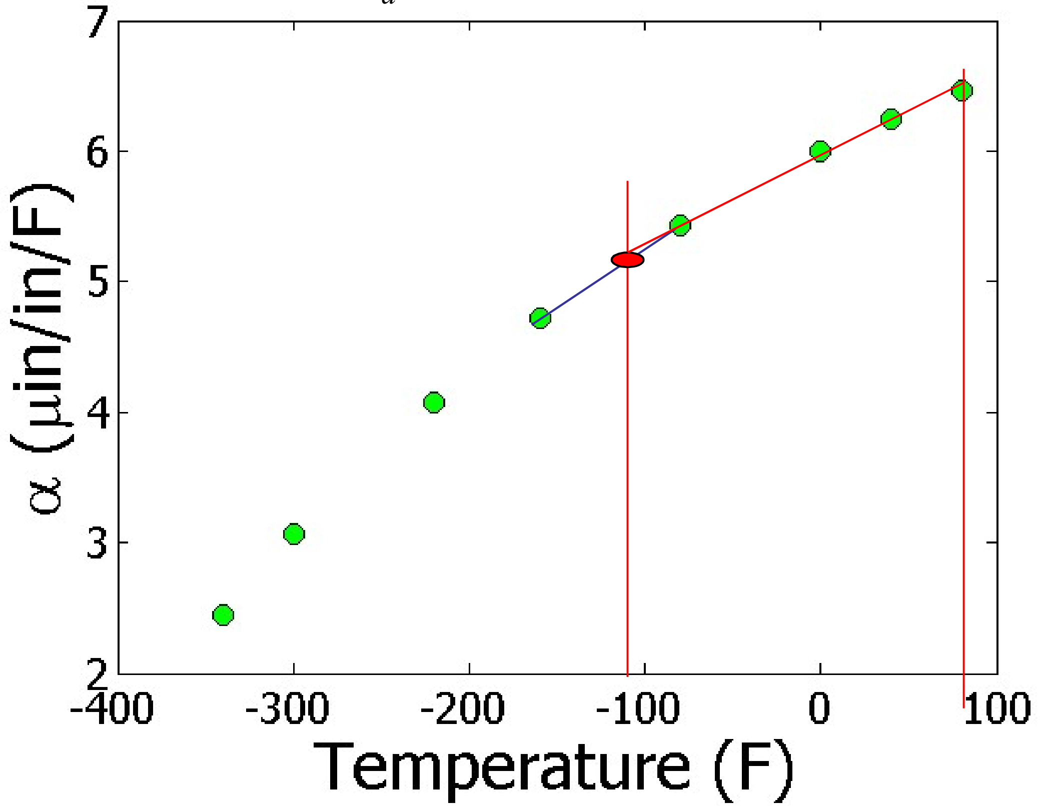
modelo matemático correto

Can You Roughly Estimate the Contraction

solução 1) determinar o valor de α nas temperaturas Ta e Tc e depois determinar a área sob a curva, considera que a varíação de α com a temperatura é linear

$$\Delta D = D\int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)dT$$

T_a=80°F; T_c=-108°F; D=12.363″



interpolação (**Método dos Mínimos Quadrados**) para determinar α a -108°F

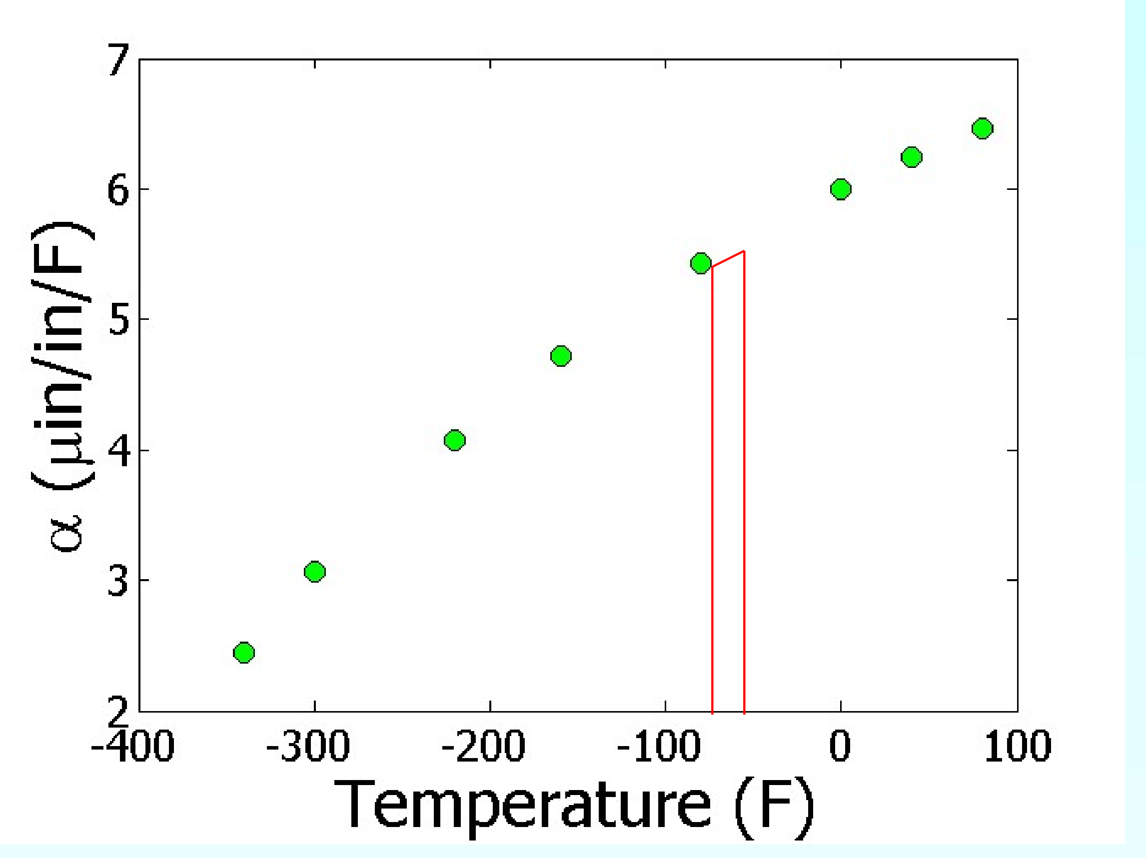
t	α
-80°F	5.43
-108°F	?
-160°F	4.72

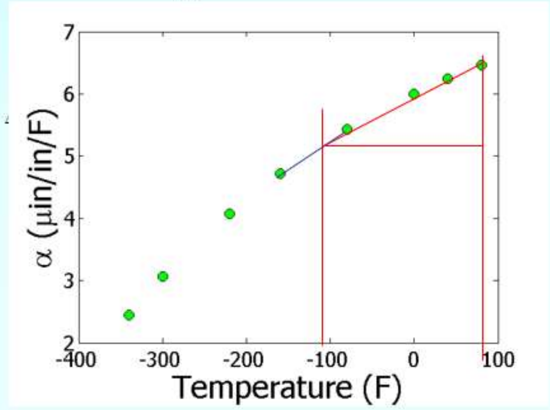
Can You Find a Better Estimate for the Contraction?

solução 2) obter uma equação que determina α como função da temperatura entre os limites Ta e Tc e realizar a integração analítica ou numérica

$$\Delta D = D\int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)\,dT$$

$$T_a = 80^{o}\mathrm{F}$$
$$T_c = -108^{o}\mathrm{F}$$
$$D = 12.363''$$





interpolação

t	alfa
-80°F	$5.43 \cdot 10^{-6}$
-160°F	$4.72 \cdot 10^{-6}$

y = ax + b [y: alfa; x: t]

sistema de duas equações e duas incógnitas

$5.43 \cdot 10^{-6} = -80\,a + b$

$4.72 \cdot 10^{-6} = -160\,a + b$

a = 0.009 ou a = $8.875 \cdot 10^{-3}$

erro de truncamento

integração numérica

área sob a curva :

triângulo + retângulo

aproximação grosseira x refinada:

um único paralelogramo(-108 a 80)

diversos paralelogramos entre (-108 a 80)

integração da equação obtida por regressão

$$\alpha = -1.2278\times 10^{-5} T^2 + 6.1946\times 10^{-3} T + 6.0150$$

$$\Delta D = D\int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)\,dT$$

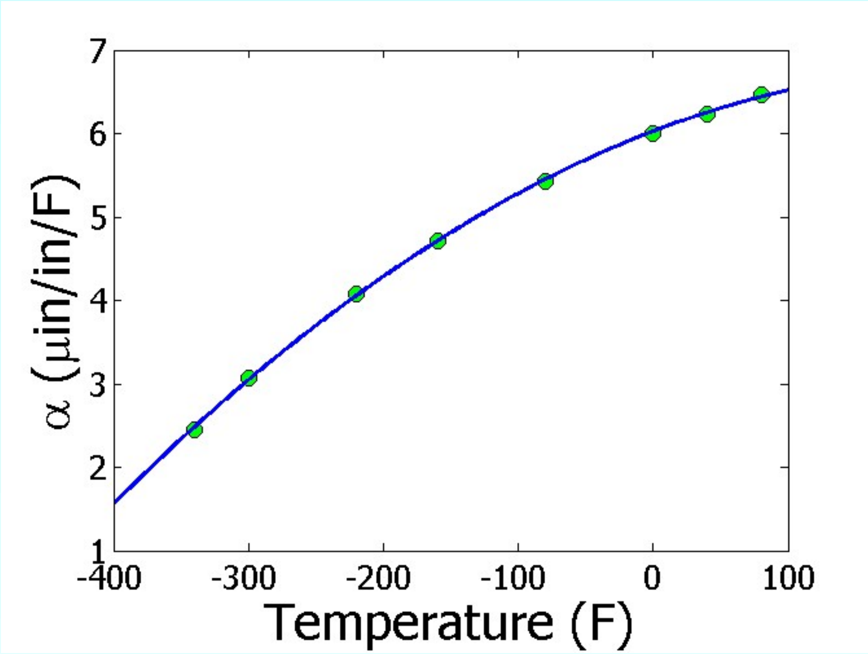
codigo matlab para resolver o problema da contração térmica do eixo

Estimating Contraction Accurately

Change in diameter (ΔD) by cooling it in dry ice/alcohol is given by

$$\Delta D = D\int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)\,dT$$

$$T_a = 80^{o}\mathrm{F}$$
$$T_c = -108^{o}\mathrm{F}$$
$$D = 12.363''$$



$$\alpha = -1.2278\times10^{-5}T^2 + 6.1946\times10^{-3}T + 6.0150$$

$$\Delta D = -0.0137'' < -0.015''\,necessários$$

So what is the solution to the problem?

One solution is to immerse the trunnion in liquid nitrogen which has a boiling point of -321^{o}F as opposed to the dry-ice/alcohol temperature of -108^{o}F.

$$\Delta D = -0.0244''$$

Revisiting steps to solve a problem

1) Problem Statement: Trunnion got stuck in the hub. (alfa constante - modelo matemático incorreto)

2) Modeling: Developed a new model (alfa variável com a temperatura - modelo matemático apropriado)

$$\Delta D = D\int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)\,dT$$

3) Solution: (diferente métodos numéricos para resolução, com possibilidade de ocorrência de erro de truncamento)

a) Used trapezoidal rule (paralelogramo único)

b) Used regression (polinômio de 1° e 2° grau) and integration (numérica ou analítica)

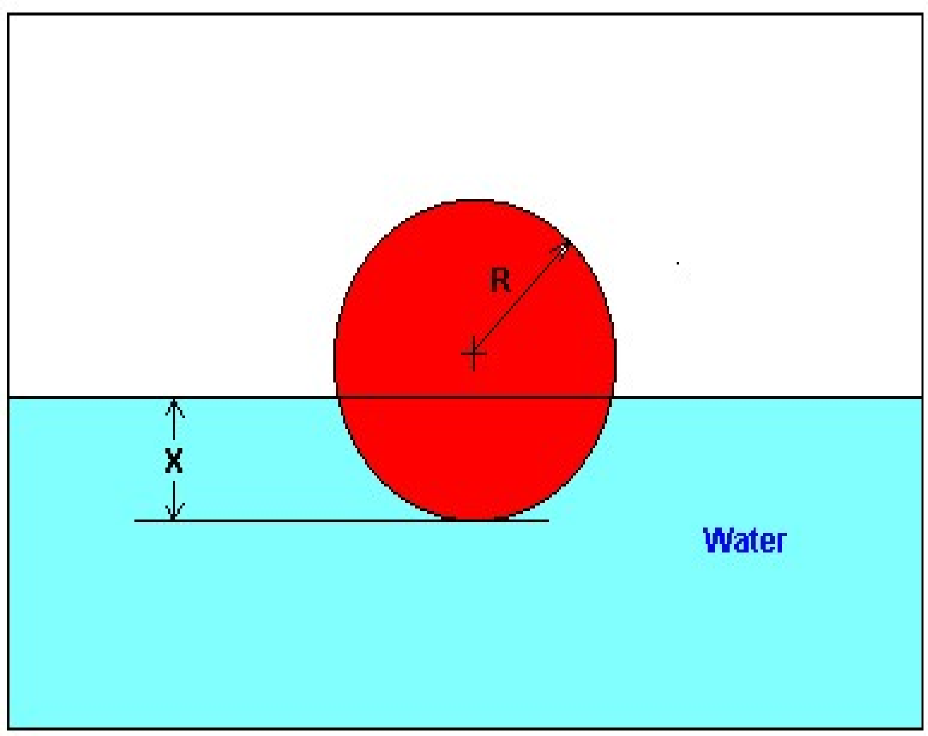
4) Implementation: Cool the trunnion in liquid nitrogen.

Nonlinear Equations

How much of the floating ball is under water?

Diameter=0.11m

Specific Gravity=0.6

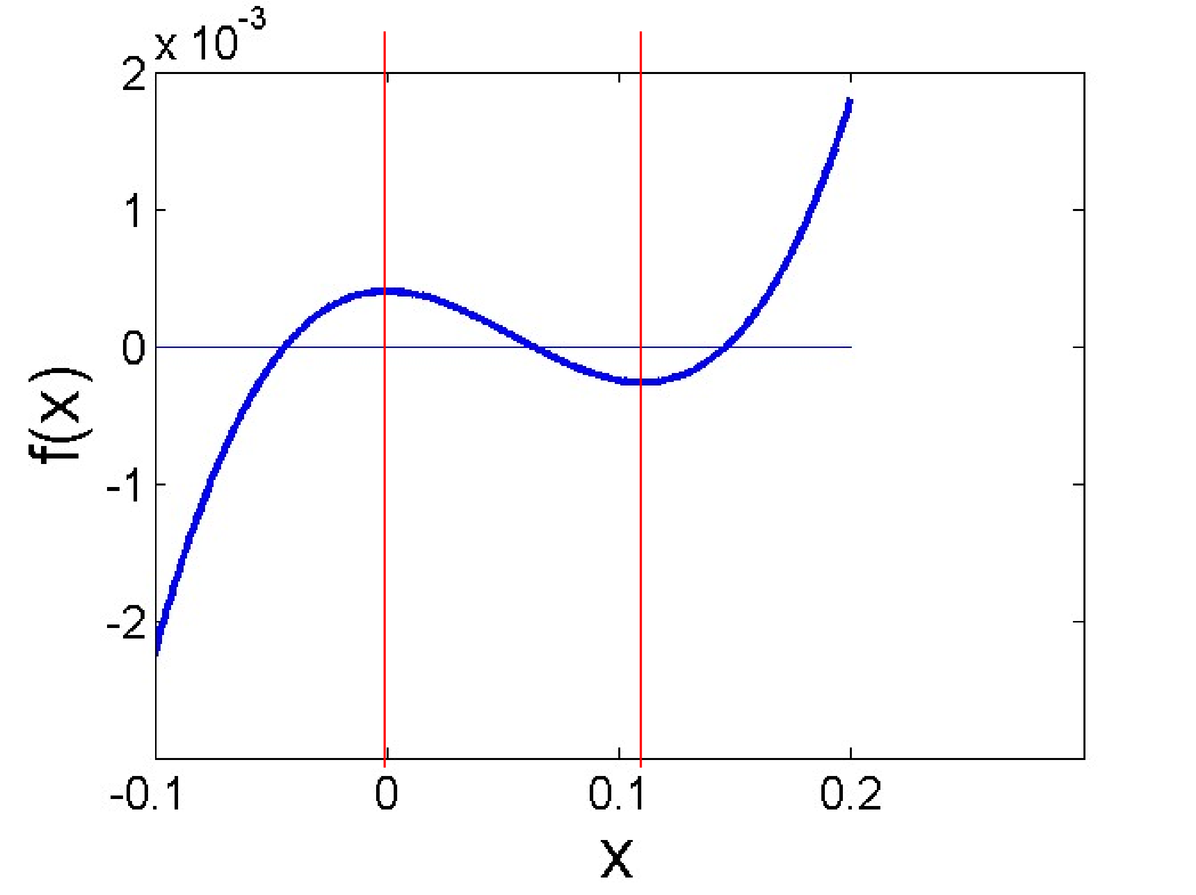


Princípio de Arquimedes
Um corpo total ou parcialmente imerso em um fluido sofre um empuxo que é igual ao peso do volume do fluido deslocado pelo corpo

$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993\times10^{-4} = 0$$

Nonlinear Equations

How much of the floating ball is under the water?



$$f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4} = 0$$

a equação possui 3 zeros (**Zeros de funções**), mas é necessário respeitar as restrições físicas do problema:

1) x > 0
2) x < D

código matlab:

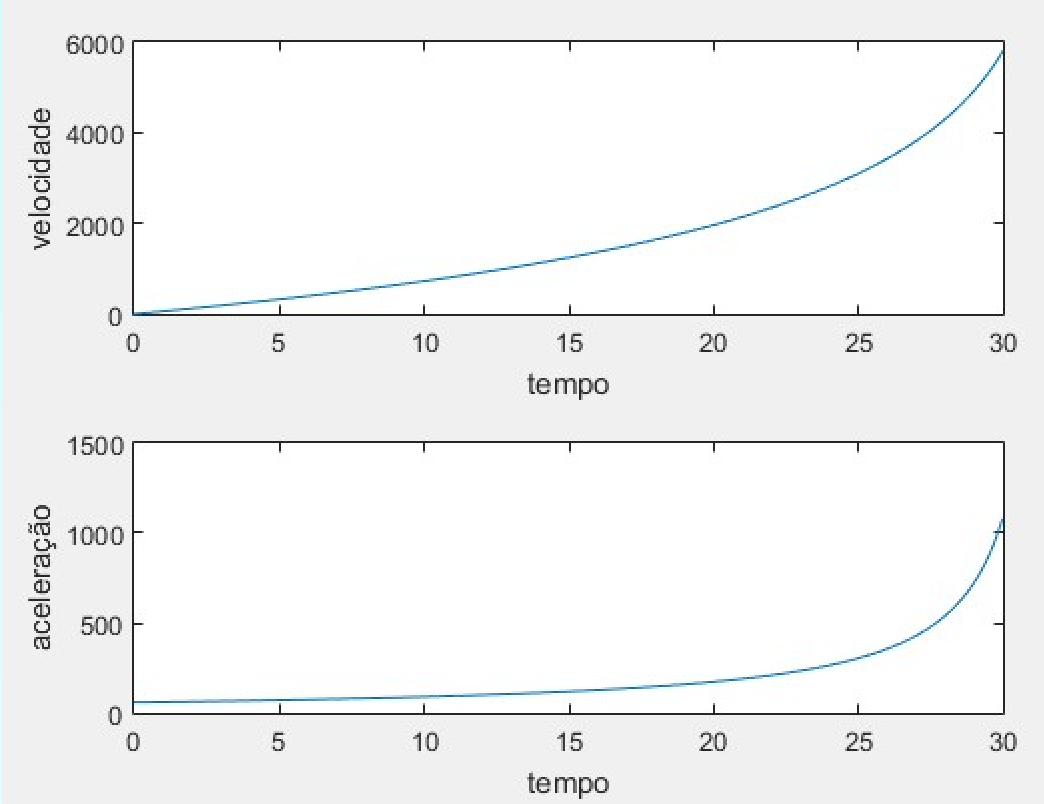
```
coef = [1 -0.165 0 3.993e-4]
roots(coef)
```

saída matlab:

```
ans =
  0.1464
  0.0624
 -0.0437
```

Differentiation

conhecendo a velocidade do foguete a cada instante de tempo; qual a acelaração?



modelo teórico conhecido para a velocidade
não é possível determinar a derivada analiticamente
é preciso realizar a **Diferenciação Numérica**

$$v(t) = 2200\ \ln\left(\frac{16\times10^4}{16\times10^4 - 5000t}\right) - 9.8t$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Differentiation

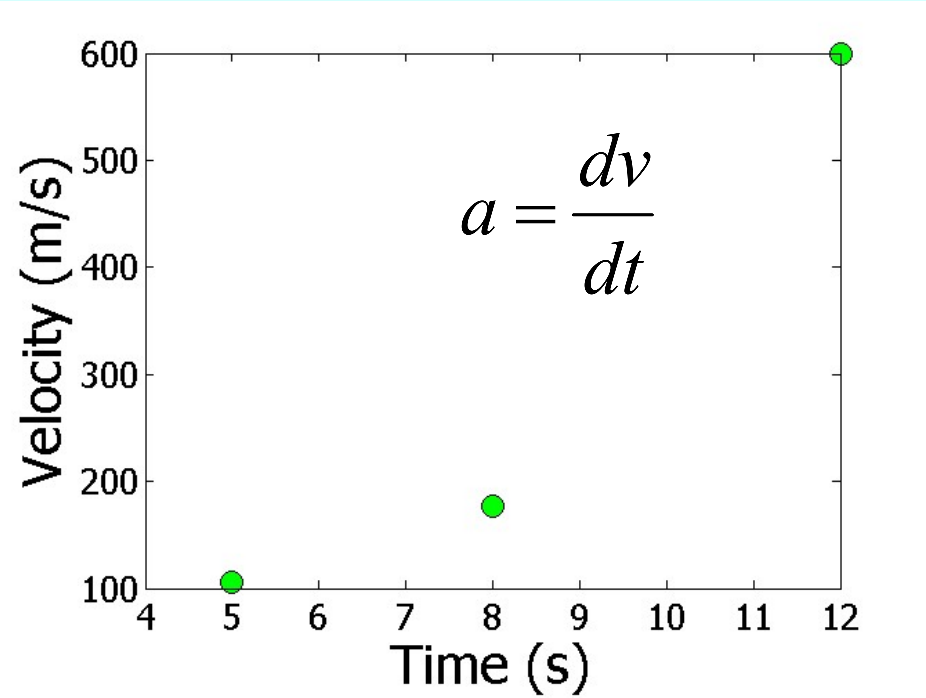
```
% código matlab para determinar velocidade e aceleração do foguete
np = 1000
t = linspace(0, 30, np);
y = 2200* log( 16e4 ./ (16e4 - 5e3*t)) - 9.8*t;

for i = 2:(np-1)
    dy(i) = ( ( y(i+1) - y(i-1) ) / ( t(i+1) - t(i-1) ) );
    dt(i) = t(i);
end
dt(1) = t(1);
dy(1) = dy(2);
dt(np) = t(np);
dy(np) = dy(np-1);

figure(1)
clf
subplot(2,1,1)
plot(t,y)
xlabel('tempo')
ylabel('velocidade')
subplot(2,1,2)
plot(t,dy)
xlabel('tempo')
ylabel('aceleração')
```

AV2

Differentiation

What is the acceleration at t=7 seconds?

Time (s)	5	8	12
Vel (m/s)	106	177	600



$$a = \frac{dv}{dt}$$

não é conhecido o modelo teórico, apenas a velocidade em diferentes instantes de tempo
é necessário realizar a **Interpolação Numérica** para determinar uma equação (polinomial de segundo grau que é fácil de diferenciar analiticamente) que representa a velocidade como função do tempo

Slide 30

AV2 Agnelo Vieira; 26/07/2018

Simultaneous Linear Equations

Find the velocity profile, given

Time (s)	5	8	12
Vel (m/s)	106	177	600

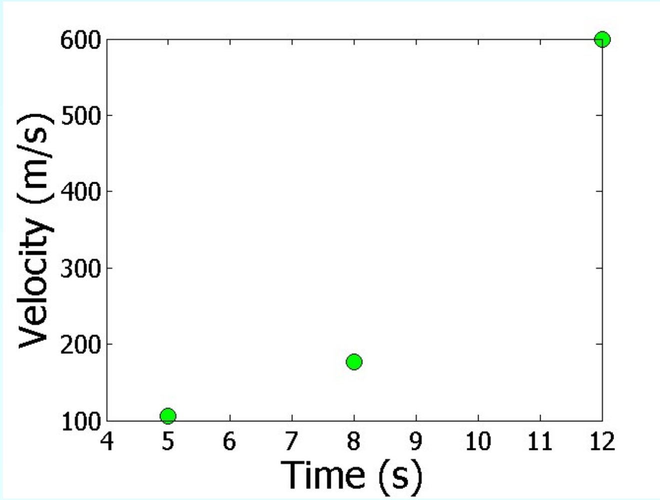
$$v(t) = at^2 + bt + c, \ 5 \le t \le 12$$

Three simultaneous linear equations

$$25a + 5b + c = 106$$

$$64a + 8b + c = 177$$

$$144a + 12b + c = 600$$

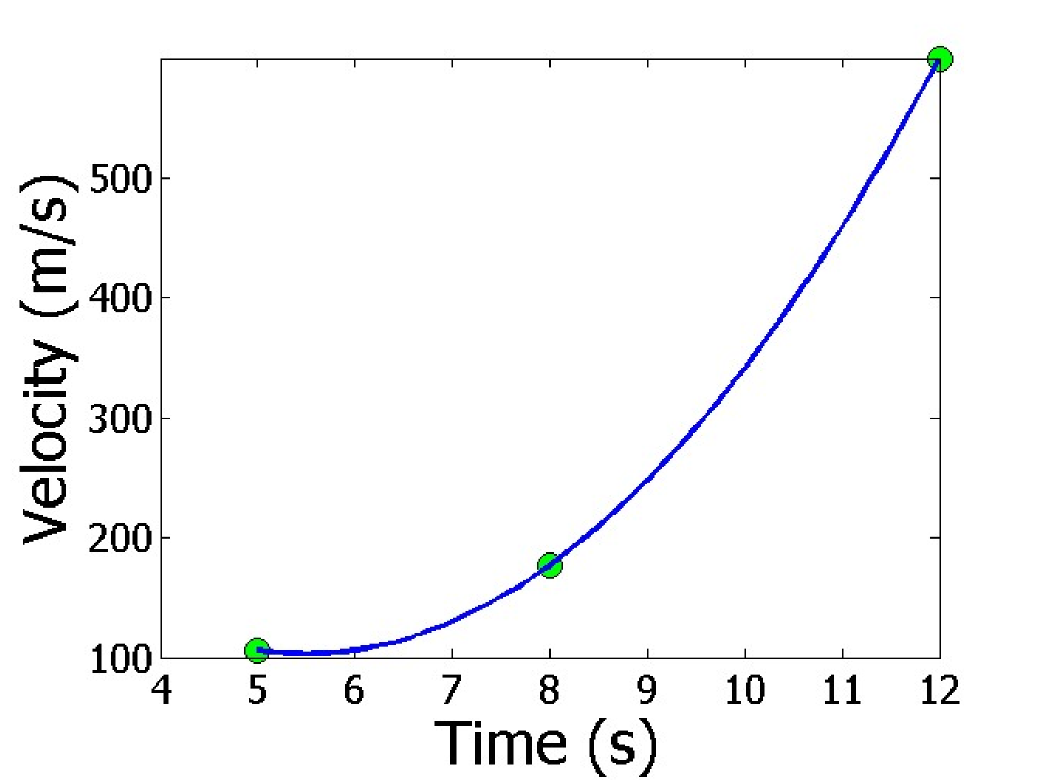


foi escolhida uma equação polinomial de segundo grau, mas poderia ter sido escolhida uma polinomial de qualquer ordem

Interpolation

What is the velocity of the rocket at t=7 seconds?

Time (s)	5	8	12
Vel (m/s)	106	177	600



Additional Resources

For all resources on this topic such as digital audiovisual lectures, primers, textbook chapters, multiple-choice tests, worksheets in MATLAB, MATHEMATICA, MathCad and MAPLE, blogs, related physical problems, please visit

http://numericalmethods.eng.usf.edu/topics/introduction_numerical.html