UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

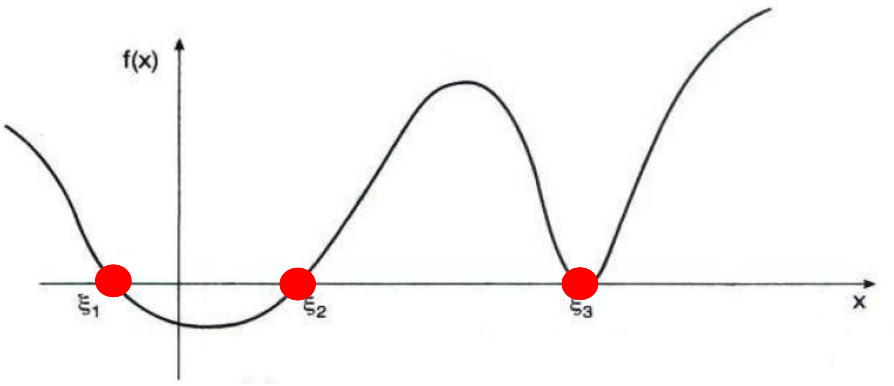
Métodos Numéricos

Zeros reais de funções reais: Introdução

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina
Professor Agnelo Denis Vieira

Um número real ξ é um zero ou raiz da função f(x) se $f(x=\xi)=0$
Os zeros de uma função “são os valores de x que anulam esta função”.

Os zeros de uma função podem ser reais ou complexos.
Em cálculo numérico estudaremos apenas métodos para obter zeros reais.



Problema

Dada uma função $y = f(x)$ encontrar os valores da variável independente x tal que $f(x) = 0$.

Métodos

- Analíticos
- Iterativos

Método Analítico

Fórmulas explícitas para a determinação das raízes

Exemplo: Encontrar as raízes/zeros da função $ax^2 + bx + c = 0$

Solução: As raízes podem ser obtidas via equação

$$x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$$

Dificuldade

Polinômios de graus mais elevados e funções com maior grau de complexidade não possuem equações

Geralmente

Impossível a determinação exata dos zeros.

Métodos Iterativos

Existe um grande número de métodos numéricos que são processos iterativos.

A ideia é **repetir** um determinado procedimento várias vezes, obtendo-se a cada repetição ou **iteração** um resultado mais preciso do que aquele obtido na iteração anterior. Tal que, a cada iteração utiliza-se o resultado da iteração anterior como parâmetro de entrada para o procedimento. (por Walter Martins Rodrigues)

Nestes métodos numéricos, gera-se uma aproximação inicial para a raiz (geralmente um intervalo que possa conter a raiz) e em seguida refina-se essa aproximação (reduz-se a largura do intervalo) através de um processo iterativo até que a largura do intervalo seja menor ou igual à precisão pré-estabelecida.

Processo de busca da raiz por um método iterativo

A obtenção dos zeros da função f(x) a partir dos métodos iterativos, ocorre em duas fases.

Fase 1: Isolamento das raízes (obter um intervalo que contém uma raiz)

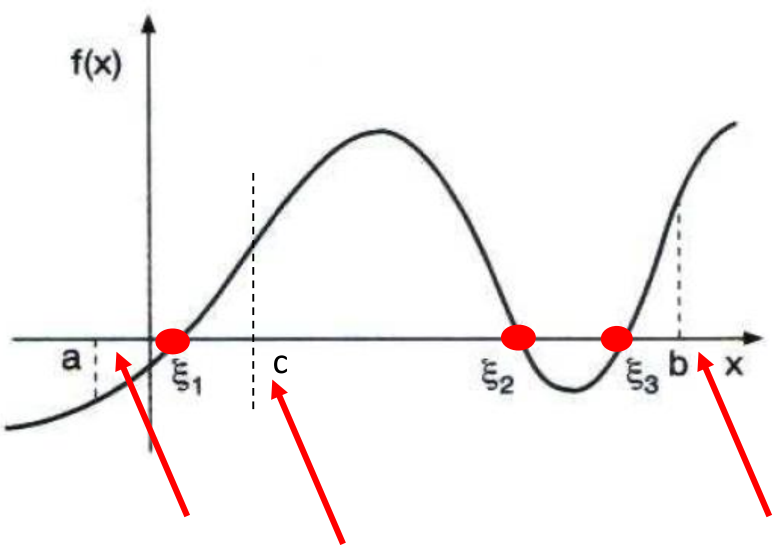
Fase 2: Refinamento (refinar a aproximação inicial até obter uma aproximação para a raiz com uma certa precisão prefixada)

FASE 1 - Isolamento das raízes

Teorema de Bolzano: Seja uma função **real** f(x) ($f : R \rightarrow R$) **contínua** em um intervalo [a,b].

Se (f(a) . f(b)) < 0
Então a função f(x) possui **pelo menos** uma raiz no intervalo [a,b].

Se (f(a) . f(b)) > 0 não é possível concluir que não há raízes no intervalo



f(a) < 0   f(c) > 0   f(b) > 0

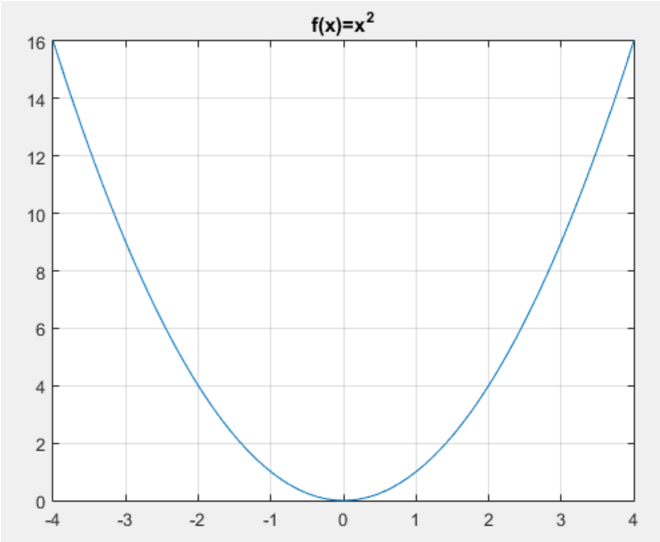
f(a).f(c) < 0 há pelos menos uma raiz em [a,c]
f(a).f(b) < 0 há pelos menos uma raiz em [a,b]
f(c).f(b) > 0 não é possível concluir que
não há raízes em [c,b]
na verdade, há duas raízes em [c,b]

FASE 1 - Isolamento das raízes

Teorema de Bolzano: Seja uma função **real** f(x) **contínua** em um intervalo [a,b].

Se (f(a) . f(b)) < 0
Então a função f(x) possui **pelo menos** uma raiz no intervalo [a,b].

Se (f(a) . f(b)) > 0 não é possível concluir que não há raízes no intervalo



f(x=-3) = 8 > 0   f(x=+3) = 8 > 0

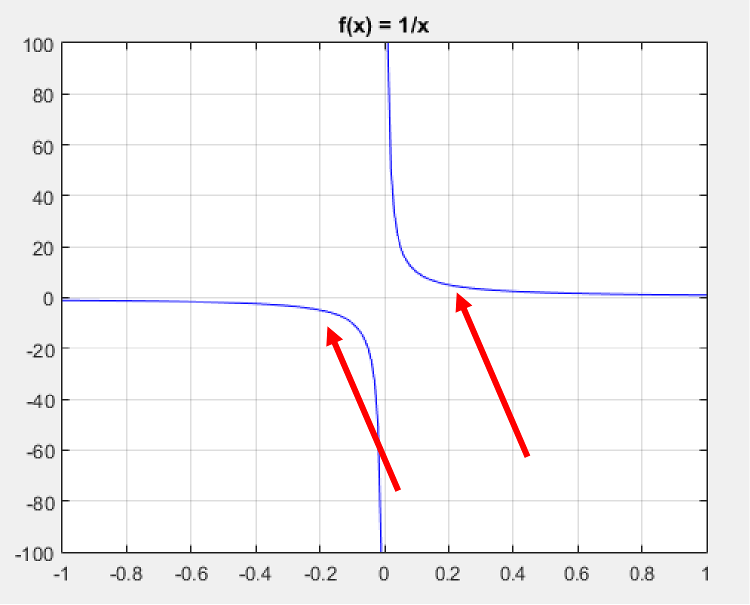
há duas raiz em x = 0

FASE 1 - Isolamento das raízes

Teorema de Bolzano: Seja uma função **real** f(x) **contínua** em um intervalo [a,b].

Se (f(a) . f(b)) < 0
Então a função f(x) possui **pelo menos** uma raiz no intervalo [a,b].

A continuidade da função é indispensável



f(x=-0.2) = -5 < 0   f(x=+0.2) = +5 > 0

f(x=-0.2) . f(x=+0.2) < 0

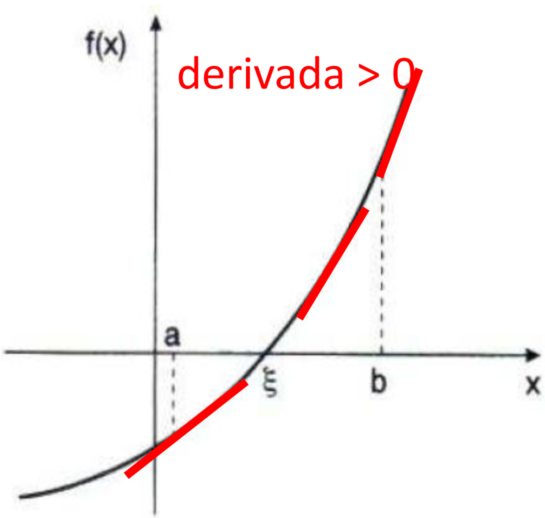
NÃO HÁ RAIZ EM [-0.2 , +0.2]
pois a função não é contínua em x=0

FASE 1 - Isolamento das raízes

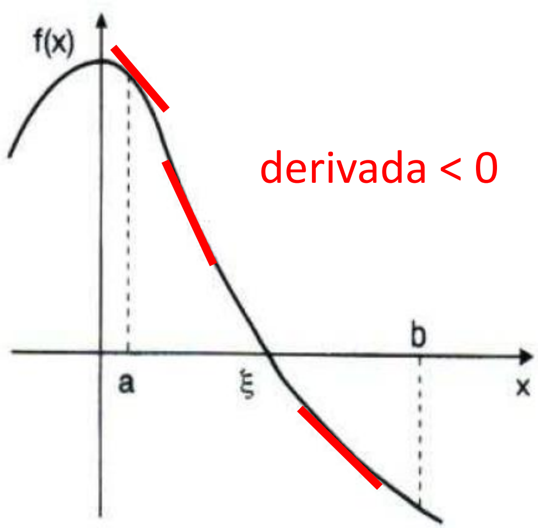
Do teorema de Bolzano, temos que:

Se a derivada da função (f'(x)) existir e **preservar o sinal** em (a, b)
Então o intervalo (a,b) contem um **único zero** de f(x).

derivada da função: inclinação da reta tangente à função em um determinado ponto



$f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$



$f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$

f(x=a) < 0 f(x=b) > 0

f(x=a). f(x=b) < 0
há pelo menos um zero em [a,b]

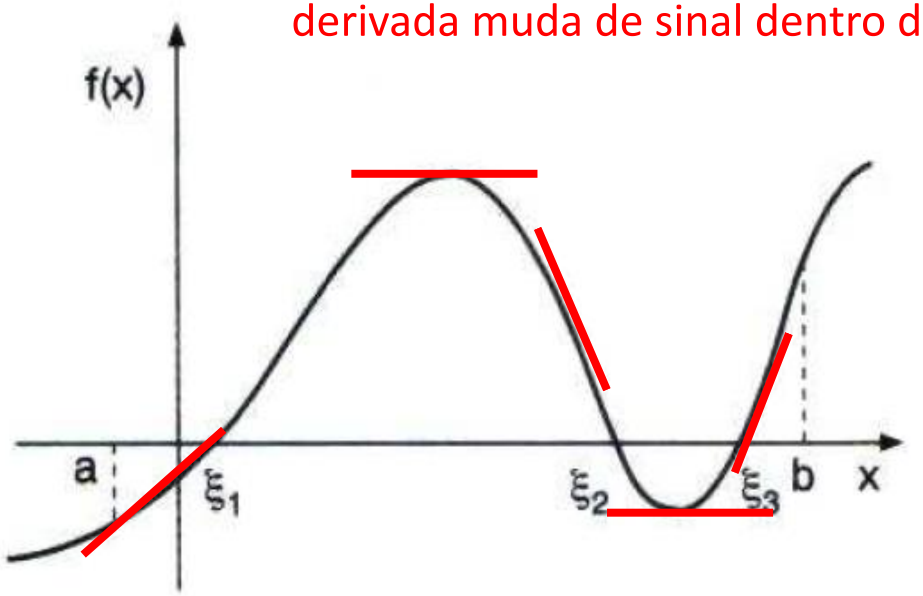
como o sinal da derivada **NÃO** muda de sinal em [a,b] então o **zero é único**

FASE 1 - Isolamento das raízes

Do teorema de Bolzano, temos que:

Se a derivada da função (f'(x)) existir e preservar o sinal em (a, b)
Então o intervalo (a,b) contem um único zero de f(x).

derivada muda de sinal dentro do intervalo (a,b)



f(x=a) < 0   f(x=b) > 0

f(x=a). f(x=b) < 0
há pelo menos um zero em [a,b]

como o sinal da derivada **MUDA** de sinal em [a,b] então o **zero não é único**

FASE 1 - Isolamento das raízes

Métodos mais comuns para localizar as raízes de f(x)

1. Tabelar f(x) e analisar as mudanças de sinal de f(x) bem como do sinal da derivada nos intervalos em que f(x) mudou de sinal.

2. Análise gráfica da função f(x).

3. Escrever a função como sendo a subtração de duas funções

   $$f(x) = g(x) – h(x)$$

   e analisar para quais valores de x ocorre a igualdade g(x) = h(x)
   neste ponto g(x) – h(x) = 0 e portanto f(x) = 0

FASE 1 - Isolamento das raízes

Método 1: Tabelar f(x) e analisar as mudanças de sinal de f(x) bem como do sinal da derivada nos intervalos em que f(x) mudou de sinal.

Exemplo: Seja $f(x) = x^3 – 9x + 3$ $f'(x) = 3x^2 - 9 = 3 (x^2 - 3)$

Análise da função:

seja o intervalo [-5,0]: $f(-5) = -77 < 0$ $f(0) = +3 > 0$

Conclusão: há pelo menos uma raiz no intervalo [-5, 0]

Análise da derivada da função

$f'(x) = 0$ em $x = \pm\sqrt{3}$,

para $x \in (-5, -\sqrt{3})$ $f'(x) > 0$

Conclusão: há uma única raiz neste intervalo

Limitações do método:

escolheu aleatoriamente o intervalo [-5,0] (e deu sorte com a escolha)

determinou as raízes de f'(x) para estimar quantas raízes há no intervalo

FASE 1 - Isolamento das raízes

Método 1: Tabelar f(x) e analisar as mudanças de sinal de f(x) bem como do sinal da derivada nos intervalos em que f(x) mudou de sinal.

Exemplo: Seja $f(x) = x^3 – 9x + 3$ $\qquad$ $f'(x) = 3x^2 - 9$

$f(-5) < 0$ $\qquad$ $f(-3) > 0$ $\qquad$ $f(2) < 0$ $\qquad$ $f(3) > 0$

Conclusão: há pelo menos uma raiz em cada um dos seguintes intervalos

[-5, -3] $\qquad$ [-3, 2] $\qquad$ [2, 3]

Como f(x) é uma polinomial de grau 3 (possui exatamente 3 raízes) então não é necessário avaliar se o sinal da derivada é preservado em cada intervalo para concluir que há uma única raiz em cada intervalo

Limitações do método:
escolheu aleatoriamente os intervalos [-5,-3] [-3,2] [2,3] (e deu **muita** sorte com a escolha)

FASE 1 - Isolamento das raízes

Método 1: Tabelar f(x) e analisar as mudanças de sinal de f(x) bem como do sinal da derivada nos intervalos em que f(x) mudou de sinal.

<u>Exemplo</u>: Seja $f(x) = x^3 – 9x + 3$ $\qquad$ $f'(x) = 3x^2 - 9$

$f(-\infty) < 0$ $\qquad$ $f(-100) < 0$ $\qquad$ $f(-10) < 0$

$f(-5) < 0$ $\qquad$ $f(-3) > 0$ $\qquad$ $f(2) < 0$ $\qquad$ $f(3) > 0$

$\Lambda x = 2$ $\qquad$ $\Lambda x = 5$ $\qquad$ $\Lambda x = 1$

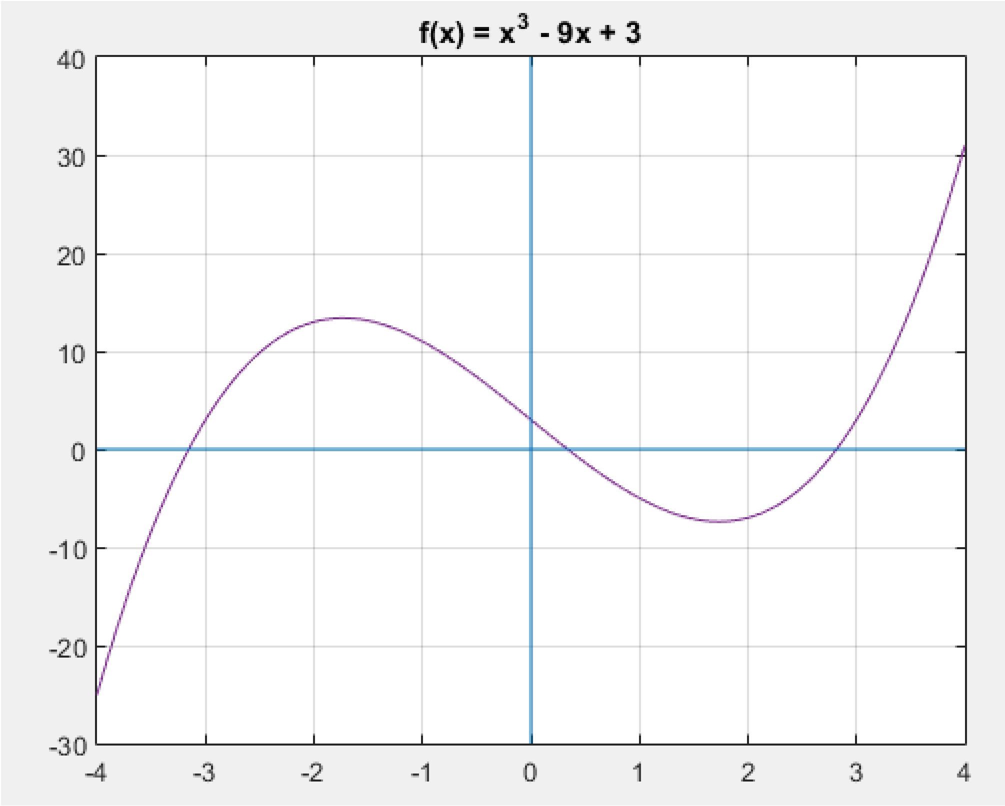
$f(5) > 0$ $\qquad$ $f(10) > 0$ $\qquad$ $f(\infty) > 0$

Limitação do método:
qual o valor de Δx a ser utilizado?
  Δx reduzido: mais sensível mas requer a determinação de muitos valores
  Δx grande: pode não detectar a variação de sinal entre f(x) e f(x+Δx)
qual valor inicial de x utilizar?

FASE 1 - Isolamento das raízes

Método 2: Análise gráfica da função f(x).

<u>Exemplo</u>: Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$



Conclusão: há uma raiz em cada um dos seguintes intervalos [-4 -3], [0, 1], [2, 3]

Limitação do método:
qual o intervalo para avaliar a função?
como realizar a representação gráfica da função?

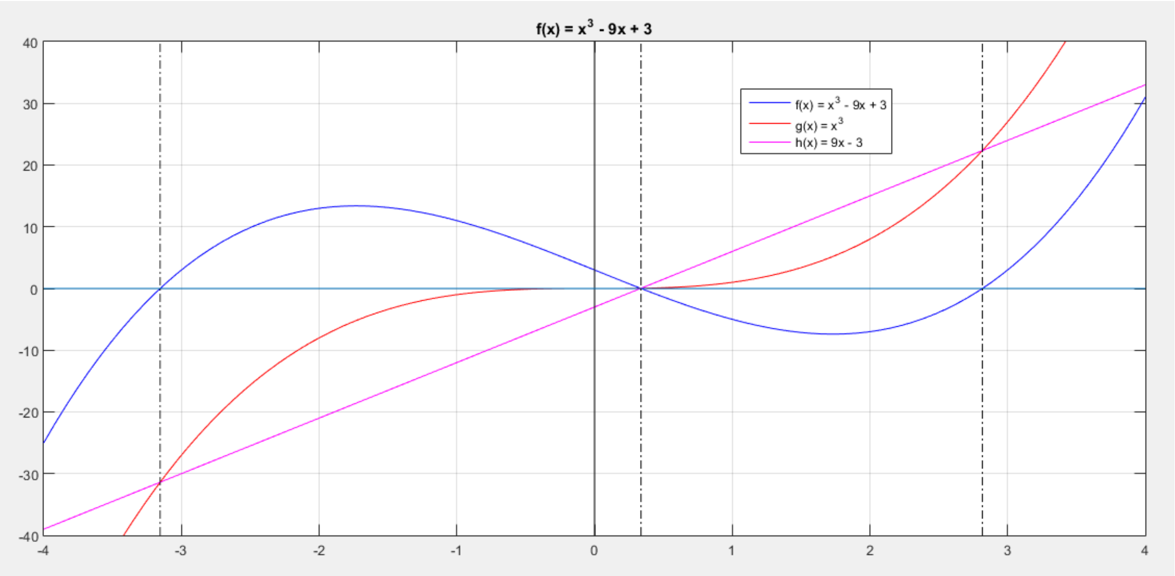
FASE 1 - Isolamento das raízes

Método 3: Escrever a função como sendo a diferença de duas funções $f(x) = g(x) - h(x)$ e analisar para quais valores de x, ocorre a igualdade $g(x) = h(x)$.

Exemplo: Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3 = (x^3) - (9x - 3)$

$g(x) = x^3$ $\qquad$ $h(x) = 9x - 3$ $\qquad$ $f(x) = g(x) - h(x) = 0$

Conclusão: há pelo menos uma raiz em cada um dos seguintes intervalos [-4 -3], [0, 1], [2, 3]



Limitação do método:

- quais funções escolher?
- como determinar os pontos em que elas se igualam?
- realizar a representação gráfica por computador ou manualmente?
- qual a vantagem de representar **no computador** g(x) e h(x) em relação a apenas f(x) ?

FASE 2 – Refinamento (via processo iterativo)

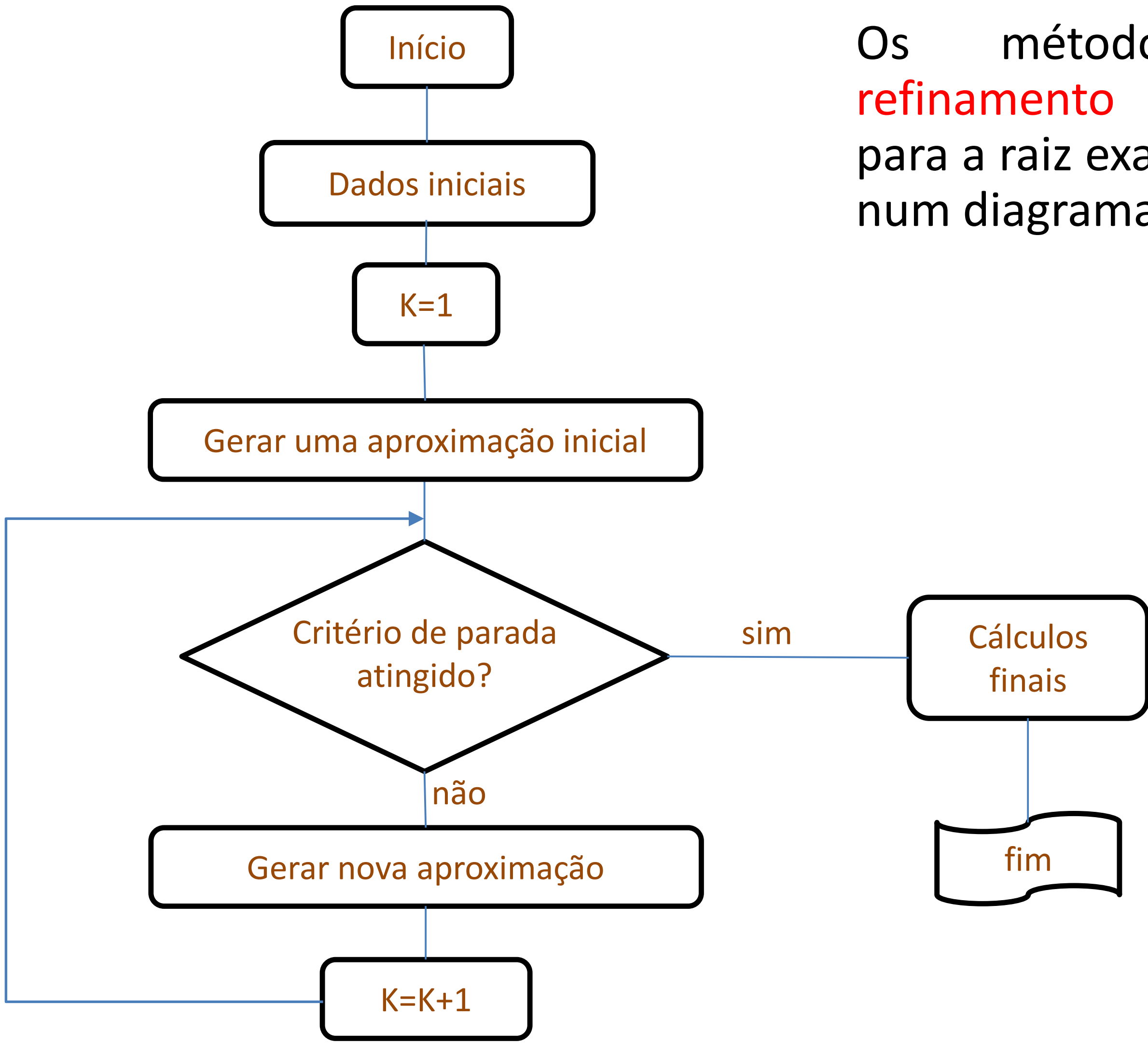
Existem diversos aspectos comuns a qualquer processo iterativo usado no refinamento.

- ✓ Estimativa inicial: (Isolamento das raízes) Para iniciar um processo iterativo, é preciso ter uma estimativa/aproximação inicial do resultado do problema. Essa estimativa pode ser obtida de diferentes formas (depende do problema).

- ✓ Convergência: Para obter um resultado próximo da solução real esperada, é necessário que a cada passo ou iteração, o resultado esteja mais próximo daquele esperado.

- ✓ Critério de parada: Obviamente não se pode repetir um processo numérico infinitamente. É preciso pará-lo em um determinado instante. O critério adotado para parar as iterações de um processo numérico é chamado de critério de parada (depende do problema e da precisão numérica desejada para a solução).

Fluxograma para determinação das raízes de uma função



Os métodos iterativos para refinamento da aproximação inicial para a raiz exata podem ser colocados num diagrama de fluxo.

Critérios de Parada

x' é a raiz aproximada com precisão ε se:

i) $|x' - \xi| \leq \varepsilon$ (erro verdadeiro absoluto)

Como efetuar este teste se não conhecemos ξ? (ξ é a raiz da exata)

ii) $|f(x')| \leq \varepsilon$

Sejam

$f(x) = 1.10^{-6} (x^3 - 9x + 3)$ para qualquer valor de x $|f(x)|$ é muito pequeno

$f(x) = 1.10^{+6} (x^3 - 9x + 3)$ para qualquer valor de x $|f(x)|$ é muito grande

Que valor de ε utilizar?

iii) se o procedimento é convergente, a cada iteração o intervalo que contém a raiz é reduzido, parar quando gerar um intervalo $[a_k, b_k]$ tal que:

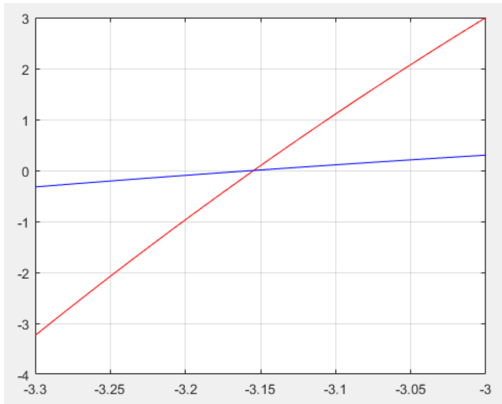
$\xi \in [a_k, b_k]$

$|\,|b_k| - |a_k|\,| < \varepsilon$

Que valor de ε utilizar?

y1 = x.^3 -9*x + 3;

y2 = 1e-1*y1;



iv) erro aproximado relativo $\leq$ valor máximo estabelecido

v) nº de dígitos significativos $\geq$ nº desejado

FASE 2 – Refinamento

Métodos que serão estudados:

- Método da Bissecção;
- Método da Posição Falsa;
- Método do Ponto Fixo;
- Método de Newton-Raphson;
- Método da Secante.