Métodos Numéricos

Zeros – Newton-Raphson e Secante

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina
Professor Agnelo Denis Vieira

Método do Ponto Fixo (Iteração linear)

Seja uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] onde existe uma raiz única, $x = \xi$ tal que $f(x=\xi) = 0$

Escolher ADEQUADAMENTE uma função g(x) e representar f(x) como

$$f(x) = g(x) - x$$

onde g(x) é denominada função de iteração para $f(x) = 0$

A função g(x) deve ser escolhida de forma que, partindo de uma aproximação inicial $x_0 \in [a,b]$ para a raiz de f(x), seja possível gerar uma sequência $\{x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_{n-1} \quad x_n=\xi\}$ de aproximações para a raiz pela relação $x_{k+1}= g(x_k)$ (ou de forma equivalente $x_k= g(x_{k-1})$)

tal que, quando ocorrer a convergência, $x_{n-1} = x_n = \xi = g(x_{n-1} = \xi)$

e assim $f(x_n = \xi)) = g(x_n) - x_n = 0$

Método do Ponto Fixo

Representar $f(x) = g(x) - x$

Em geral, existem inúmeras funções de iteração possíveis

A convergência depende da função de iteração e da aproximação inicial x_0

Seja a função $f(x) = x^2 + x - 6 = 0$

Esta função pode ser reescrita de diversas formas, produzindo diversas g(x) candidatas

a) $x = 6 - x^2$			$g1(x) = 6 - x^2$
b) $x^2 = 6 - x$	$x = \pm (6 - x)^{0.5}$		$g2(x) = (6 - x)^{0.5}$
c) $x^2 + x = 6$	$x(x+1) = 6$	$x = 6 / (x+1)$	$g3(x) = 6 / (x+1)$
d) $x^2 + x = 6$	$x(x+1) = 6$ $(x+1) = 6/x$	$x = (6/x) - 1$	$g4(x) = (6/x) - 1$

Uma função g(x) candidata pode ser determinada por

e) $g5(x) = x - (f(x) / f'(x))$ $g5(x) = x - (x^2 + x - 6) / (2x + 1)$

ver: Zeros_exemplo2_PontoFixo.m

Método do Ponto Fixo

Critério de convergência

Teorema:

Sejam: ξ uma raiz de $f(x) = 0$, isolada em um intervalo $I=[a,b]$ centrado em ξ
$g(x)$ uma função de iteração para $f(x) = 0$.

Se

1. $g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas no intervalo $[a,b]$
2. $|g'(x)| < 1, \forall x \in [a,b]$
3. $x_0 \in [a,b]$ (x_0 é o ponto de partida da sequencia $\{x_k\}$)

Então a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1}= g(x_k)$ converge para ξ.

Além disto, a convergência é mais rápida quanto menor $|g'(x)|$

Escolha do x_0 (extremo do intervalo que apresenta convergência mais rápida)

se $|g'(a)| < |g'(b)|$, então
$x_0 = a$
senão,
$x_0 = b$
fim

Método Newton-Raphson (das tangentes)

O método de Newton-Raphson é uma instância do método do ponto fixo, tal que a função de iteração é determinada como

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

onde:
x é uma estimativa para a raiz
f(x) é a função para a qual se deseja determinar a raiz
f'(x) é a derivada da função f(x)

Método Newton-Raphson (das tangentes)

Seja f(x) com zero ξ em [a, b] e f'(x) $\neq$ 0 em todo o intervalo [a, b]

Partindo de uma estimativa inicial x_0 para a raiz
as iterações são realizadas empregando a equação
onde k especifica o número da iteração

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Com isto é obtida a sequência de aproximações para a raiz nas diversas iterações

$\{x_0\ x_1\ x_2\ \ldots\ x_k\ x_{k+1}\}$

O processo continua até satisfazer um critério de parada

- critério 1) NDS desejados $\geq$ NDS mínimo estabelecido
- critério 2) EAR $\leq$ tolerância estabelecida para o erro de aproximação relativo
- critério 3) $|x_{k+1} - x_k| \leq$ tolerância estabelecida para o erro de aproximação
- critério 4) Num. iterações $\geq$ Num. iterações máximo (parada sem garantia de determinar uma raiz)

A estimativa para a raiz é o último valor obtido para x_{k+1}.

Convergência do método de Newton-Raphson.

A convergência no método de Newton-Raphson é **garantida** para um intervalo [a,b] que contém a raiz ξ de f(x), desde que f(x) e f'(x) **sejam contínuas** nesse intervalo e que $f'(\xi) \neq 0$.

Portanto, se **utilizarmos uma estimativa inicial** x_0 tal que $x_0 \in [a,b]$, a convergência **estará garantida,** desde que x_0 esteja próximo da raiz.

A ordem de convergência é igual a 2 (quadrática)

Método Newton-Raphson (das tangentes)

Aspectos positivos:

- Convergência é quadrática, isto significa que a quantidade de dígitos significativos corretos duplica à medida que os valores da sequência se aproxima da raiz.
Note que essa correção não acontece em relação às primeiras iterações realizadas.

- Necessita de apenas uma estimativa da raiz, e não do intervalo de busca, desde que satisfeitas as condições do teorema de convergência

Método Newton-Raphson (das tangentes)

Aspectos negativos:

- É necessário determinar analiticamente a derivada da função

- É necessário determinar, a cada iteração, o valor numérico da derivada da função, o que pode ser muito caro computacionalmente.

- Se na sequência de valores x_k a derivada da função for nula ou tiver um módulo muito reduzido não é possível determinar x_{k+1}

Método Newton-Raphson (das tangentes)

<u>Aspectos negativos</u>:

- Ocorre a divergência da sequência {... xk xk+1 xk+2 ... } quando há um ponto de inflexão da função

$$f(x) = (x-1)^3 + 0.512 = 0 \qquad x0 = 2 \quad \Delta x = 3$$

$$f(x) = (x-1)^3 + 0.512 = 0 \qquad x0 = 5 \quad \Delta x = 7$$

$$f(x) = x^3 - Ax^2 + B = 0$$

$$A = 0.5 \qquad B = 1$$

$$x0 = 0.8 \qquad \Delta \mathrm{x} = 3$$

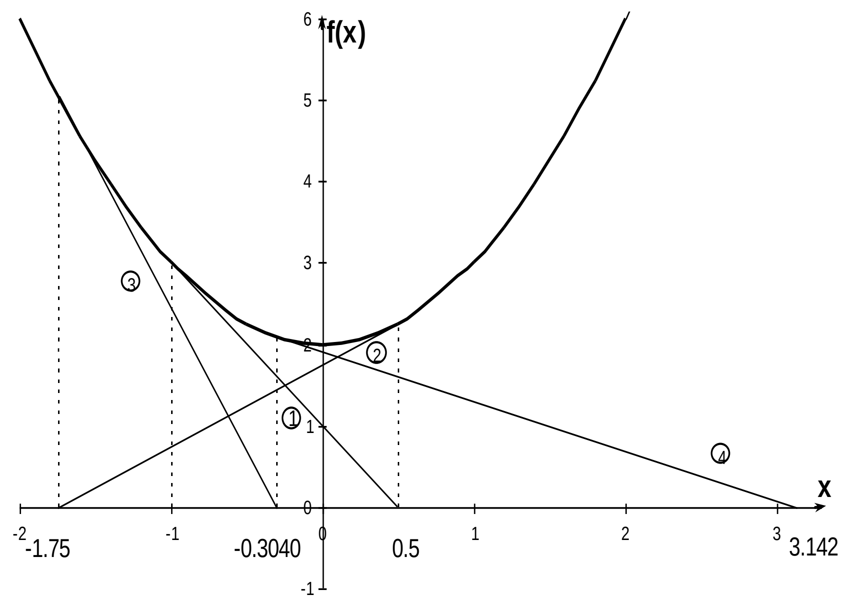
$$\mathrm{x}0 = 1 \qquad \Delta \mathrm{x} = 3$$

Método Newton-Raphson (das tangentes)

<u>Aspectos negativos</u>:

- Pode ocorrer a alternância em torno de um mínimo local ou de um máximo local, o que faz com que o processo não seja encerrado

$f(x) = x^2 + 2 = 0$ $\quad xo = -1$ $\quad \Delta x = 3$



Método Newton-Raphson (das tangentes)

Aspectos negativos:

- Se f(x) é oscilatória e possui diversas raízes, um valor inicial x0 que seja próximo a uma das raízes pode conduzir à localização de uma raiz mais distante

$$f(x) = \sin x = 0 \qquad x0 = 2.3\pi \qquad \Delta x = 3\pi$$

$$f(x) = \sin x = 0 \qquad x0 = 2.4\pi \qquad \Delta x = 3\pi$$

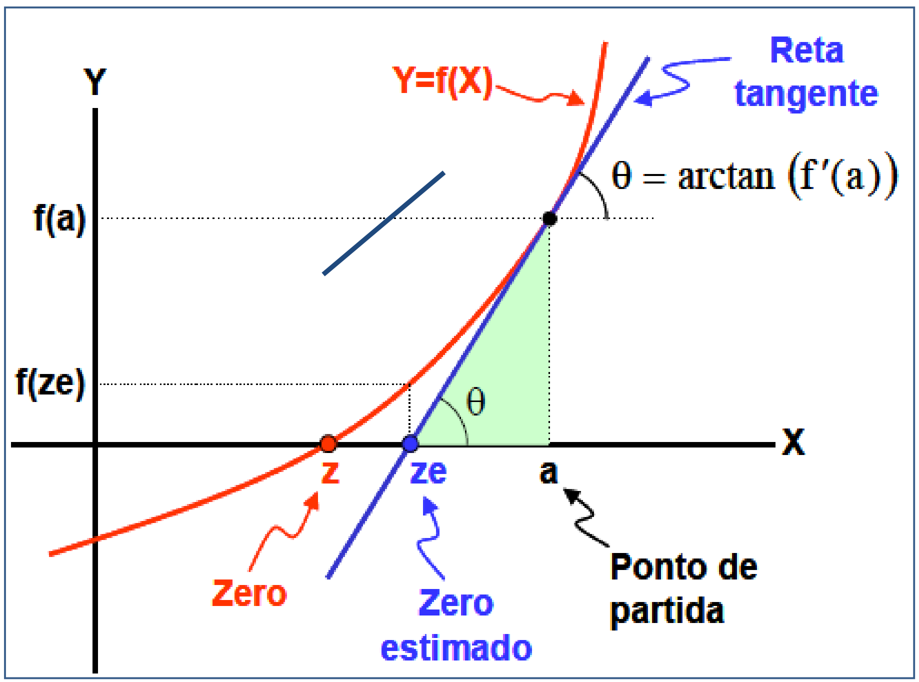
$$f(x) = \sin x = 0 \qquad x0 = 2.6\pi \qquad \Delta x = 3\pi$$

$$f(x) = \sin x = 0 \qquad x0 = 2.5\pi \qquad \Delta x = 3\pi$$

Método Newton-Raphson (das tangentes)

Interpretação trigonométrica

Dada uma função f(x) contínua num intervalo fechado onde existe uma raiz única, é possível determinar uma **aproximação (ze)** de tal raiz a partir da **interseção da tangente à curva** em um ponto x_0=a com o eixo das abscissas.



a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente a uma função em um ponto é igual à derivada da função neste ponto
considere a reta tangente a f(x) no ponto f(x=a)

$$\tan(\theta) = \frac{cat.oposto}{cat.adjacente} = \frac{|f(a) - 0|}{|a - ze|} = f'(a)$$

$$ze = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Método da Secante

Assim como o método de Newton-Raphson, o método da secante é uma instância do método do ponto fixo, tal que a função de iteração é dada por

$$x_{k+2} = \frac{x_k\, f(x_{k+1}) - x_{k+1}\, f(x_k)}{f(x_{k+1}) - f(x_k)}$$

Método da secante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Método de Newton-Raphson

A grande vantagem do método da secante em relação ao método de Newton-Raphson é que:

- não requer que a função f(x) seja diferenciável;
- não é necessário determinar analiticamente a derivada da função (o que pode ser difícil);
- a derivada da função pode ser nula;
- o algoritmo não precisa calcular a derivada a cada iteração (o que pode ser computacionalmente caro), determina-se apenas o valor da função

Método da Secante

Partindo de duas estimativas iniciais x_0 e x_1 para a raiz

as iterações são realizadas empregando a equação $$x_{k+2} = \frac{x_k\, f(x_{k+1}) - x_{k+1}\, f(x_k)}{f(x_{k+1}) - f(x_k)}$$

onde k especifica o número da iteração

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \qquad x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \qquad x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Com isto é obtida a sequência de aproximações para a raiz nas diversas iterações

$\{x_0\ x_1\ x_2\ \ldots\ x_k\ x_{k+1}\}$

O processo continua até satisfazer um critério de parada

critério 1) NDS desejados $\geq$ NDS mínimo estabelecido

critério 2) EAR $\leq$ tolerância estabelecida para o erro de aproximação relativo

critério 3) $|\ x_{k+1}$ - xk$|$ $\leq$ tolerância estabelecida para o erro de aproximação

critério 4) Num. iterações $\geq$ Num. iterações máximo (parada sem garantia de determinar uma raiz)

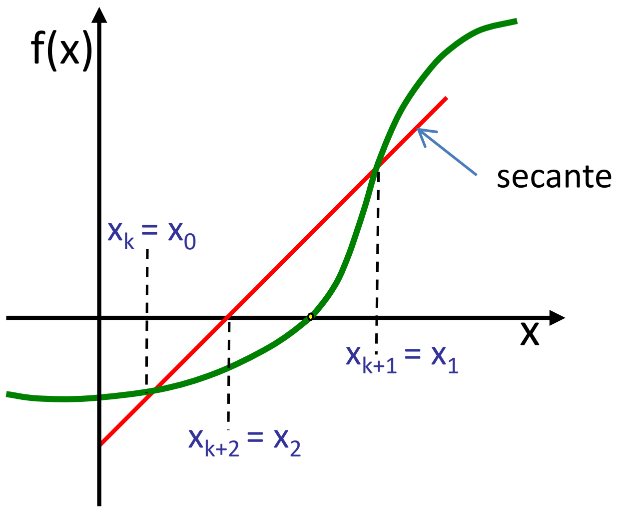
A estimativa para a raiz é o último valor obtido para x_{k+1}.

Método da Secante

reta secante entre os pontos
pto. 1: (x_k, $f(x_k)$)
pto. 2: (x_{k+1}, $f(x_{k+1})$)

$$y = a\,x + b$$

no ponto
pto. 3 : (x_{k+2}, $f(x_{k+2})$)
tem-se $f(x_{k+2}) = 0$ (ou seja $y = 0$)



o coef. angular da reta determinado por

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

pode considerar dois pares de pontos
(x_{k+1} e x_k) e (x_{k+1} e x_{k+2})

$$a = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{f(x_{k+1}) - 0}{x_{k+1} - x_{k+2}}$$

$$x_{k+2} = x_{k+1} - \frac{f(x_{k+1})\left(x_{k+1} - x_k\right)}{f(x_{k+1}) - f(x_k)}$$

Método da Secante

Convergência do método da Secante

O número de iterações necessárias não pode ser determinado antes do algoritmo começar.

O algoritmo irá parar (interrupção da execução do programa se ocorrer divisão por zero) se uma reta secante horizontal é encontrado.

Zeros Reais de Funções Reais

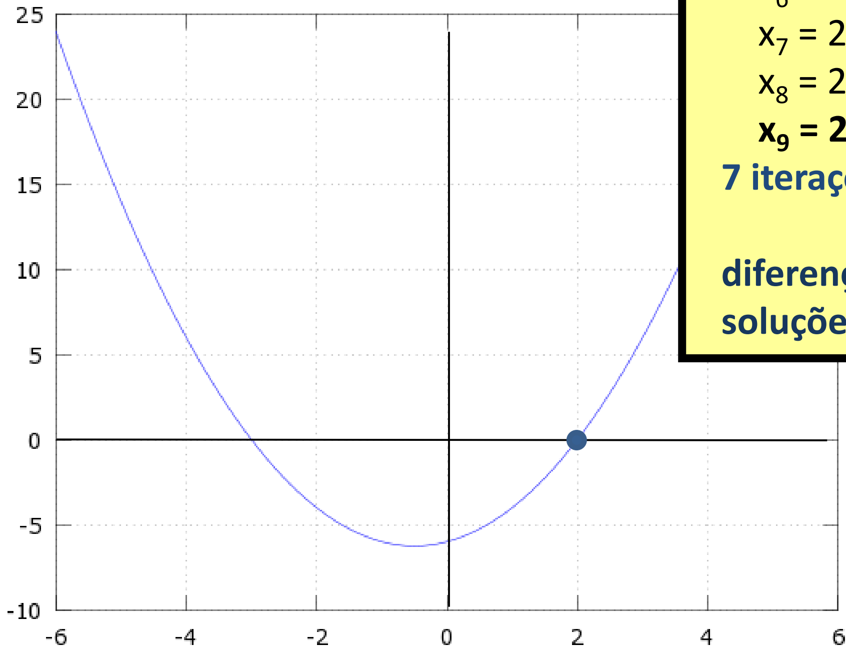
Método da Secante

Exemplo

$f(x) = y = x^2 + x - 6$

$x_0 = 10$
$X_1 = 15$

$\varepsilon = 10^{-5}$



$x_0 = 10$
$x_1 = 15$
$x_2 = 6,00000000000000$
$x_3 = 4,36363636363636$
$x_4 = 2,83200000000000$
$x_5 = 2,23995030614961$
$x_6 = 2,03287883540718$
$x_7 = 2,00149621510768$
$x_8 = 2,00000977158232$
$\mathbf{x_9 = 2,00000000292320}$

7 iterações

(Octave)

diferença entre as duas últimas soluções: $9,76865912738489 \times 10^{-6}$