Cálculo de Integrais reais com a ajuda do Teorema de Resíduos

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, definimos a integral imprópria

$$(*) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

quando o limite existir. Nesse caso dizemos que $\int_{-\infty}^{\infty} f$ converge. Quando o limite não existe diremos que a integral é divergente.

Nesse estudo vamos considerar integrais da forma

$$(**) \quad \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx$$

quando esse limite existir, vamos chamá-lo de Valor Principal de Cauchy da integral $\int_{-\infty}^{\infty} f$.

Observação: Claramente a existência do limite em $(*)$ implica na existência do limite $(**)$, porém a recíproca é falsa no caso geral. Por exemplo: se $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, então

$$\int_{-r}^{r} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos r + \cos -r = 0, \forall r > 0 \implies \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} \operatorname{sen} x \, dx = 0$$

Agora, tomando $a_n = \frac{\pi}{2} - n\pi$ e $b_n = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$\int_{a_n}^{b_n} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos(2n\pi) + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right)}_{=0} = -1, \forall n \in \mathbb{N}$$

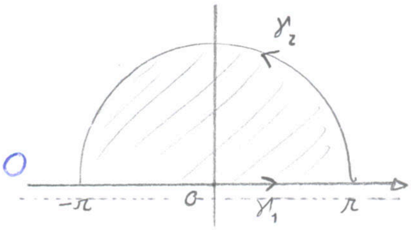
Como o valor do limite depende da forma como a_n e b_n crescem para o infinito (e poderíamos usar outros valores) então o limite $(*)$ não existe quando $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Princípio básico: "complexificar" a função f, trocando a variável x por z na expressão de f ou ainda, obter uma função complexa $F(z)$ tal que $\operatorname{Re} F(z) = f(x)$.

Vamos analisar algumas situações nas quais esse princípio funciona bem e quais são as hipóteses requeridas.

Situação 1: A função complexificada $f(z)$ é analítica em um semiplano que contém o eixo real e possui apenas uma quantidade finita de singularidades isoladas nesse semiplano, todas do tipo polo com parte imaginária positiva.

Denotemos $H_\varepsilon = \{ z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}(z) > -\varepsilon \}$, $\varepsilon > 0$ o semiplano no qual f é analítica, exceto pelos polos $a_1, a_2, \dots, a_K \in \mathbb{C}$, todos com $\operatorname{Im}(a_j) > 0$



Faz sentido calcular $\int_\gamma f(z)dz$ ao longo de $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ sendo

- $\gamma_1(t) = t$, $-r \leq t \leq r$, e $\gamma_2(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.
- $r > \max\limits_{1 \leq j \leq n} |a_j|$ (para garantir que todos os polos estão na região limitada delimitada por γ)

logo

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_{-r}^{r} f(t)dt + \int_0^\pi f(re^{it})\, ire^{it} dt$$

pelo teorema dos resíduos temos

$$\int_{-r}^{r} f(t)dt + \int_0^\pi f(re^{it})\, ire^{it} dt = \sum_{j=1}^{K} 2\pi i \operatorname{Res}(f; a_j)$$

Se conseguirmos provar que

$$(1) \quad \lim_{r \to \infty} \int_0^\pi f(re^{it})\, ire^{it} dt = 0$$

poderemos concluir que

$$\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{K} \operatorname{Res}(f; a_j)$$

Problema: como garantir que o limite (1) seja nulo

Uma tentativa válida é

$$(2) \quad |f(re^{it})| \leq \frac{K}{r^2}$$, para algum $K > 0$ e $\forall t \in [0, \pi]$ e r grande

Se f satisfaz essa condição então

$$\left|\int_0^\pi f(re^{it})\, i r e^{it}\, dt\right| \leq \int |f(re^{it})|\, |r|\, |dt|$$

$$\leq \frac{Kr}{r^2}\int_0^\pi |dt| = \frac{K\pi}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

Ao exigir a condição (2) no semiplano, a condição ao longo do eixo real passa a ser

$$(3) \qquad |f(x)| \leq \frac{K}{x^2}, \quad \text{para } |x| \text{ grande}$$

impondo uma condição forte no decaimento de f no infinito

<u>Importante</u>: escrevendo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{-r} f + \int_{-r}^{r} f + \int_r^b f$$

com $r>0$ suficientemente grande para garantir que vale (3), teremos

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^{-r}\frac{K}{x^2}\,dx + \left|\int_{-r}^{r} f(x)\,dx\right| + \int_r^b \frac{K}{x^2}\,dx$$

como $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_a^{-r}\frac{K}{x^2}\,dx = \frac{K}{r}$ e $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_r^b \frac{K}{x^2}\,dx = \frac{K}{r}$

então

$$\lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{K}{r} + \int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \frac{K}{r}\right)$$

$$= \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx$$

dessa forma a integral imprópria existe e é igual ao valor principal da integral.

<u>Uma situação real em que a tentativa acima ocorre</u>

Suponha que $f(z) = p(z)/q(z)$, sendo p e q polinomios em $\mathbb{C}$ tais que

1º) $q(z)$ não tem zeros reais (no eixo real)

2º) $k = \text{grau}(q(z)) - \text{grau}(p(z)) \geq 2$

Nessas condições, considere a função $g(z) = \dfrac{z^k p(z)}{q(z)}$, como os polinômios no numerador e denominador tem o mesmo grau, então existe o limite

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \alpha$$

Tomando $|z|$ suficientemente grande, teremos

$$|g(z)-\alpha|<1 \implies \left|\frac{z^k p(z)}{q(z)}\right| - |\alpha| < 1$$

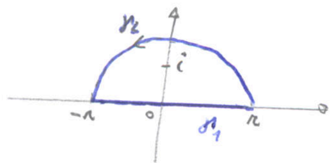
$$\implies \left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| < \frac{1+|\alpha|}{|z|^k} = \frac{C}{|z|^k}, \text{ com } k \geq 2$$

Exemplo 1: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

A função complexificada é $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, que tem polos simples em $z=+i$ e $z=-i$ e esses são os únicos zeros do denominador.

Então f é analítica em $H_{1/2} = \{z;\ Im(z) > -\frac{1}{2}\} - \{i\}$ com um polo de ordem 1 em $z=i$, no qual

$$Res(f;i) = \lim_{z\to i} (z-i)\frac{1}{z^2+i} = \frac{1}{2i}$$



logo $$\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\,dz = 2\pi i\, Res(f,i) = \pi, \text{ sendo } \gamma = \gamma_1+\gamma_2 \text{ com } r>1$$

e portanto $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

Exemplo 2: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{x^2}{x^4+1} = 2\pi i \left(\sum_j Res\left(\frac{z^2}{z^4+1}, a_j\right)\right)$$

sendo essa soma sobre os polos a_j localizados no semiplano superior.

Note que esses polos são as raízes quartas de -1, ou seja,

$$\underbrace{e^{i\pi/4},\ e^{i3\pi/4}}_{\text{tem parte imaginária positiva}},\ e^{i5\pi/4} \text{ e } e^{i7\pi/4}$$

como $Res(f; e^{i\pi/4}) = \frac{1}{4} e^{-i\pi/4}$ e $Res(f; e^{3\pi i/4}) = \frac{1}{4} e^{-3\pi i/4}$
então
$$Res(f, e^{i\pi/4}) + Res(f; e^{i3\pi/4}) = \frac{-i}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = \pi/\sqrt{2}$$

Situação 2: Seja F uma função racional (quociente de polinômios) e queremos calcular
$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt$$

O caminho natural de integração aqui é $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.
Como
$$\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \quad e \quad \operatorname{sen}(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$$
então
$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt = \int_0^{2\pi} F\left(\frac{1}{2}(e^{it} + (e^{it})^{-1}), \frac{1}{2i}(e^{it} - (e^{it})^{-1})\right) dt$$
$$= \int_\gamma F\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right) dz$$

Se f não possui polos ao longo de γ, essa integral é a soma dos resíduos de F na bola $B(0,1)$.

__exemplo__ $\int_0^{\pi} \frac{1}{a+\cos t}\, dt$, $a > 1$

Como a função cosseno é par então $\int_0^{\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t}$

Ao longo de $\gamma(t) = e^{it}$ temos $a + \cos t = \dfrac{e^{2it} + 2ae^{it} + 1}{2e^{2it}}$
e
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{it}\, dt}{e^{2ti} + 2ae^{ti} + 1} \underset{(z=e^{it})}{=} \frac{2}{i} \int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}$$
logo
$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = -i \int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}$$

Como $p(z) = z^2 + 2az + 1 = (z-\alpha)(z-\beta)$ com $\alpha = -a - \sqrt{a^2-1}$ e $\beta = -a + \sqrt{a^2+1}$ então $|\alpha| > 1$ e $|\beta| < 1$. Assim $1/p(z)$ tem um polo simples em β. Como $Res(1/p, \beta) = \lim_{z\to\beta} (z-\beta)\frac{1}{p-z} = \frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$, segue do teorema dos resíduos que
$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = (-i)\, 2\pi i\, Res(1/p, \beta) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$