Situação 3: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua, exceto em um ponto $c\in\mathbb{R}$. Queremos calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ e $c\in[a,b]$.

Neste caso a ideia é tomar $\alpha,\beta>0$ com $a<c-\alpha<c+\beta<b$ e considerar

$$\int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx + \int_{c+\beta}^b f(x)\,dx$$

se existirem

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx \quad e \quad \lim_{\beta\to 0}\int_{c+\beta}^b f(x)\,dx$$

então definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to 0}\int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to 0}\int_{c+\beta}^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

Como fizemos antes, também definiremos o valor principal da integral $\int_a^b f$ por

$$V.P.\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx\right) \qquad (2)$$

Claramente, a existência dos limites em (1) implica na existência do valor principal (2) e portanto poderemos definir

$$\int_a^b f(x)\,dx = V.P.\int_a^b f(x)\,dx$$

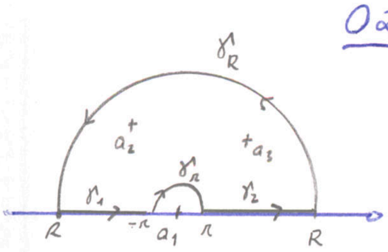
O problema (como sempre) é que a condição (2) não implica (1), portanto esse método deve ser usado com muito cuidado, analisando as funções envolvidas caso a caso.

A ideia geral para calcular o valor principal da integral será complexificar a função f para poder usar o teorema dos resíduos.

Suponha que a função $f=f(z)$ seja analítica no semi-plano

$$H_\varepsilon = \{z\in\mathbb{C}\,;\, Im(z)>-\varepsilon\}$$

exceto por um número finito de polos $a_1,a_2,\dots,a_k\in\mathbb{C}$ todos com $Im(a_j)\geq 0$, $j=1,2,\dots,k$.



A ideia aqui é usar semicírculos de modo a considerar uma região limitada na qual os pólos com $Im(a_j)>0$ estarão em seu interior e aqueles com $Im(a_j)=0$ estarão fora da região limitada pela curva.

Vamos analisar um caso em que as contas funcionam para entender melhor a "complexidade" dessa situação.

exemplo: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

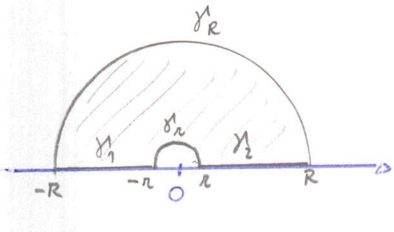
Esse é um caso em que temos certeza que tudo dará certo, pois a única singularidade (em $z=0$) é removível. Logo o método de cálculo por resíduos deve funcionar.

A ideia aqui é considerar a função $f(z)=e^{iz}/z$, $z\neq 0$, pois

$$\operatorname{Re} f(z)\Big|_{y=0} = \frac{\cos x}{x} \quad e \quad \operatorname{Im} f(z)\Big|_{y=0} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

A função $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z} = \dfrac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n z^n}{n!} = \dfrac{1}{z} + h(z)$

tem um polo simples em $z=0$ com $Res(f;0)=1$. Além disso $h(z)$ é analítica no plano todo, em particular, limitada em um disco centrado na origem



Considere o caminho $\gamma = \gamma_1 - \gamma_r + \gamma_2 + \gamma_R$ sendo

$\gamma_1(t)=t\ (-R\le t\le -r)$, $\gamma_2(t)=t\ (r\le t\le R)$

$\gamma_r(t)=re^{it}\ (0\le t\le \pi)$ e $\gamma_R(t)=Re^{it}\ (0\le t\le \pi)$

Como $f(z)$ não possui polos na região limitada delimitada por γ, então

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

Note também que

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} Rie^{it}\,dt$$

$$= i\int_0^\pi e^{iR(\cos t + i \operatorname{sen} t)}\,dt$$

$$= i\int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen} t + iR\cos t}\,dt$$

logo

$$\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \le \int_0^\pi \left|e^{-R\operatorname{sen} t + iR\cos t}\right| dt = \int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt \quad (3)$$

Note que o integrando $\varphi(t) = e^{-R\operatorname{sen} t}$, com $0 \le t \le \pi$ e $R > 1$ tem derivada $\varphi'(t) = -R\cos t\, e^{-R\operatorname{sen} t}$, logo φ é decrescente em $[0, \pi/2]$, crescente em $[\pi/2, \pi]$ e assume seu mínimo em $t_0 = \pi/2$.

Em particular, para qualquer $\delta > 0$ $(0 < \delta < \pi/2)$, o máximo de φ no intervalo $[\delta, \pi - \delta]$ ocorre nos extremos e vale $e^{-R\operatorname{sen}\delta}$. Como

$$\int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen} t}\,dt = \int_0^\delta \varphi + \int_\delta^{\pi-\delta} \varphi + \int_{\pi-\delta}^\pi \varphi$$

e

$$\int_0^\delta \varphi(t)\,dt \le e^{-R\operatorname{sen} 0}\int_0^\delta dt = \delta \quad (4)$$

$$\int_{\pi-\delta}^\pi \varphi(t)\,dt \le e^{-R\operatorname{sen}\pi}\int_{\pi-\delta}^\pi dt = \delta$$

$$\int_\delta^{\pi-\delta} \varphi(t)\,dt \le e^{-R\operatorname{sen}\delta}\int_\delta^{\pi-\delta} dt \le e^{-R\operatorname{sen}\delta}(\pi - 2\delta) \le \pi$$

Juntando todas as informações de (3) e (4) somos levados a

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \le 2\delta + \pi e^{-R\operatorname{sen}\delta}$$

Note que $\lim_{R\to\infty} e^{-R\operatorname{sen}\delta} = 0$, logo a idéia é usar essa convergência para controlar o δ que aparece acima, que até agora não possui controle (bastava estar entre 0 e $\pi/2$)

Pela definição de limite, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $R_0 > 0$ tal que tal que $R > R_0 \Rightarrow e^{-R \operatorname{sen} \delta} < \varepsilon$

Agora basta escolher $\delta < \varepsilon$ para ter

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq (2+\pi)\varepsilon \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

Lembrando que $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ teremos

$$\lim_{R\to\infty} \left[\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right] = 0$$

Como a integral do meio não depende de R, então

$$\lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = -\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

Agora $\int_{\gamma_r} e^{iz}/z \, dz = \int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma_r} h(z)\, dz$

$$= -\pi i + \int_{\gamma_r} h(z)\, dz$$

Como h é contínua sobre o compacto $\{\gamma_r\}$ então existe $K > 0$ tal que $|h(z)| \leq K$, $\forall z \in \{\gamma_r\}$, logo

$$\left| \int_{\gamma_r} h(z)\, dz \right| \leq \int_{\gamma_r} |h(z)| |dz| \leq K \int_{\gamma_r} |dz| = \pi r K$$

e assim $\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} h(z)\, dz = 0 \Rightarrow \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} e^{iz}/z \, dz = -\pi i$

Conclusão

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \left(\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \pi i$$

Como $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ vem

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi$$