Funções Meromorfas

Aula 16
01
04/02/16

Seja G um conjunto aberto e $f: G \to \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é analítica módulo singularidades isoladas se existe um conjunto $\Sigma \subset G$ com as seguintes características

(i) f é analítica em $G \setminus \Sigma$

(ii) f possui uma singularidade isolada em cada ponto de Σ

(iii) Σ não tem pontos de acumulação

O conjunto Σ é chamado de conjunto singular de f em G.

Obs: (1) Se $\Sigma = \phi$ então f é analítica em G

(2) Como Σ é discreto então é fechado e $G - \Sigma = G \cap \Sigma^c$ é aberto

Proposição: Seja f uma função analítica módulo sing. isoladas no conjunto aberto G e Σ o conjunto singular de f em A. Se γ é uma curva retificável em $G \setminus \Sigma$ homóloga a zero em G então o conjunto

$$F = \{ z \in \Sigma \, ; \, \eta(\gamma; z) \neq 0 \} \text{ é finito}$$

Dem: Suponha, por absurdo, que F é infinito e denotemos por U_∞ a componente conexa não limitada (a qual é única) de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$. Note que $\mathbb{C} \setminus U_\infty$ é um conjunto limitado.

Como $\eta(\gamma; z) = 0$, $\forall z \in U_\infty$ então $F \cap U_\infty = \phi$ e portanto F é um conjunto infinito e limitado. Daqui segue que F possui um ponto de acumulação em G.

Seja $a \in G$ ponto de acumulação de F. Como $F \subset \Sigma$ e Σ não tem pontos de acumulação (por definição) então

$$a \notin \Sigma \Rightarrow a \notin F \Rightarrow \eta(\gamma; a) = 0$$

Como a função $z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\} \longmapsto \eta(\gamma; z) \in \mathbb{Z}$ é contínua, então $\exists \delta > 0$ tal que $\eta(\gamma; z) = 0$, $\forall z \in B(a, \delta)$

$\Rightarrow B(a, \delta) \cap F = \phi \Rightarrow$ a não é ponto de acumulação de F ∎

Teorema dos Resíduos: Seja f uma função analítica módulo singularidades isoladas no aberto $G \subset \mathbb{C}$ e Σ o conjunto singular de f em G; então

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z \in \Sigma} \eta(\gamma; z) \operatorname{Res}(f; z)$$

para qualquer curva retificável em $G \setminus \Sigma$ homóloga a zero em G.

Obs: Como o conjunto $F = \{z \in \Sigma;\ \eta(\gamma; z) \neq 0\}$ é finito então a soma acima possui apenas uma quantidade finita de parcelas e a prova segue do teorema dos resíduos que já provamos.

Definição: Dizemos que a função f é meromorfa no aberto $G \subset \mathbb{C}$ se f for analítica módulo singularidades isoladas em G e se o conjunto singular não tiver singularidades essenciais, ou seja, se os pontos de Σ forem apenas polos ou sing. removíveis.

Ex: Toda função racional é meromorfa.

Relação entre zeros e polos

Suponha que f é uma função analítica na região $G \subset \mathbb{C}$ e que $z = a_1$ seja um zero de ordem m_1 de f, então existe uma função analítica g_1 definida na mesma região G, tal que

$$f(z) = (z - a_1)^{m_1} g_1(z) \quad \text{e} \quad g_1(a_1) \neq 0 \qquad (1)$$

derivando f temos

$$f'(z) = m_1 (z - a_1)^{m_1 - 1} g(z_1) + (z - a_1)^{m_1} g_1'(z) \qquad (2)$$

e assim

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z - a_1} + \frac{g_1'(z)}{g_1(z)}$$

Note que a continuidade de g_1 em G e o fato de $g(a_1) \neq 0$ garantem que $g_1(z) \neq 0$, $\forall z \in G - \{a_1\}$, logo g_1'/g_1 é analítica em G.

Agora, se f possui outro zero $a_2 \in G$ de ordem m_2 então por (1), a_2 também é zero de g_1 de mesma ordem m_2. Neste caso existe uma função g_2 analítica em G tal que

$$g_1(z) = (z-a_2)^{m_2} g_2(z) \quad e \quad g_2(a_2) \neq 0$$

Repetindo o raciocínio acima chegaremos a

$$\frac{g_1'(z)}{g_1(z)} = \frac{m_2}{z-a_2} + \frac{g_2'(z)}{g_2(z)} \qquad (3)$$

com g_2'/g_2 analítica em G, $g_2(a_2) \neq 0$ e $g_2(a_1) \neq 0$

De (3) e (1) temos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z-a_1} + \frac{m_2}{z-a_2} + \frac{g_2'(z)}{g_2'(z)} \qquad (4)$$

Repetindo esse processo para todos os zeros $a_1, a_2, \dots, a_\ell \in G$ da função f, obteremos uma função $g_\ell(z)$ analítica em G tal que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{m_j}{z-a_j} + \frac{g_\ell'(z)}{g_\ell(z)}$$, sendo m_j a ordem de cada a_j

Além disso, $g_\ell(a_j) \neq 0$, $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \ell$ e $\frac{g_\ell'(z)}{g_\ell(z)}$ é analítica em G.

Suponha agora que f tem um polo de ordem n_1 no ponto $b_1 \in G$. Neste caso existe uma função h_1 analítica em G tal que $h_1(b_1) \neq 0$ e

$$f(z) = \frac{h_1(z)}{(z-b_1)^{n_1}} = (z-b_1)^{-n_1} h_1(z) \qquad (6)$$

Derivando essa expressão teremos

$$f'(z) = -n_1 (z-b_1)^{-n_1-1} h_1(z) + (z-a)^{-n_1} h_1'(z)$$

logo

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n_1}{z-b_1} + \frac{h_1'(z)}{h_1(z)}$$

com h_1'/h_1 analítica em G e $h_1(b_1) \neq 0$.

Repetindo as ideias acima, se $b_1, b_2, \ldots, b_m$ são zeros de f em G, obteremos uma função analítica h_m tal que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{-n_k}{z-b_k} + \frac{h_m'(z)}{h_m(z)}$$

tal que h_m'/h_m é analítica e $h_m(b_k) \neq 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots, m$

Concatenando os argumentos acima, é possível encontrar uma função g analítica em G tal que $g(a_j) \neq 0$, $\forall j$, $g(b_k) \neq 0$, $\forall k$, g'/g é analítica em G e

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{m_j}{z-a_j} - \sum_{k=1}^{m} \frac{n_k}{z-b_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Pela fórmula de Cauchy e teorema de Cauchy que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{\ell} m_j \, n(\gamma; a_j) - \sum_{k=1}^{m} n_k \, n(\gamma; b_k)$$

Teorema: Seja f uma função meromorfa em G com conjunto singular Σ e conjunto de zeros $Z = \{z \in G;\, f(z) = 0\}$, então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in Z} O(a)\, n(\gamma; a) - \sum_{b \in \Sigma} O(b)\, n(\gamma; b)$$

sendo γ uma curva em $G \setminus (Z \cup \Sigma)$ homóloga a zero em G e $O(a)$ e $O(b)$ a ordem dos zeros e polos respectivamente.

A demonstração desse teorema está esboçada logo acima. A única coisa que devemos observar é que esses somatórios são finitos. A soma sobre os pontos singulares é finita pelo primeiro teorema da aula de hoje. A soma em Z segue as mesmas linhas, pois os zeros de uma função analítica são isolados.