Aula 3
01
07/01/16

Séries de Potências

Uma série de potências em torno do ponto $a \in \mathbb{C}$ é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

sendo (a_n) uma sequência de números complexos.

A questão central aqui é saber quando essa série converge

<u>Exemplo importante</u> (série geométrica) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

Note que, para todo $n \geq 0$ inteiro, temos

$$1 + z^{n+1} = (1-z)(1+z+\cdots+z^n)$$

logo

$$\sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{1}{1-z} + \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

Quando $|z| < 1$ temos $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ e a série acima converge

Para $|z| > 1$ o termo geral não tende a zero e a série diverge.

No estudo da convergência de séries de potência aparece a noção de limite superior de uma sequência de números reais não negativos, vamos recordar esse conceito.

Seja (x_n) uma sequência de numeros reais com $x_n \geq 0, \forall n$.
Se denotamos

$$y_1 = \sup_{k \geq 1} x_k, \; y_2 = \sup_{k \geq 2} x_k, \; \ldots, \; y_n = \sup_{k \geq n} x_k, \ldots$$

teremos

$$y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq y_{n+1} \geq \cdots \geq 0$$

ou seja, (y_n) é uma sequência não crescente limitada inferiormente logo existe $\lim_{n\to\infty} y_n = L$. Este limite é chamado de limite superior da sequência (x_n) e denotado

$$\limsup x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} x_k$$

As principais propriedades do limite superior que nos interessam são as seguintes: se $\limsup x_n = L$ então 02

(i) $\forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists n > N;\ x_n > L - \varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N:\ x_n \leq L + \varepsilon$

(iii) $\limsup c\, x_n = c \limsup x_n \quad , \forall c > 0$

<u>Teorema</u>: Seja (a_n) uma sequência em $\mathbb{C}$ e $L = \limsup |a_n|^{1/n}$ então:

(i) $L = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n < +\infty\ , \forall z \in \mathbb{C}$

(ii) $L = \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n < +\infty$ se, e somente se, $z = 0$

(iii) Se $0 < L < \infty$ e definirmos $R = 1/L$ então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n < \infty$ para $|z| < R$ e diverge para $|z| > R$ (R é chamado de raio de convergência da série)

<u>Dem</u>:

(i) Como $L = 0$ então $\limsup |a_n|^{1/n} |z| = 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Assim, para cada $z \in \mathbb{C}$ fixado, existe $n_z \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n|^{1/n}|z| < 1/2$, sempre que $n \geq n_z$. Logo

$$|a_n z^n| < \frac{1}{2^n}\ , \forall n \geq n_z$$

Segue do teste M de Weierstrass que que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(ii) Como $L = \infty$, para qualquer $z \neq 0$ fixado existe uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n|^{1/n} > \frac{1}{|z|} \Rightarrow |a_n z^n| \geq 1$ e os termos da série $\sum a_n z^n$ não se aproximam de zero. Logo a série diverge $\forall z \neq 0$. A convergência para $z = 0$ é óbvia.

(iii) Seja $R = 1/L$ com $0 < L < \infty$

Tomando $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < R$ então $|z| = R(1 - 2\delta)$, para algum $\delta > 0$, e $\limsup |a_n|^{1/n} |z| = R(1 - 2\delta) \lim |a_n|^{1/n} = (1 - 2\delta)$

Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n|^{1/n}|z| < 1 - \delta$, $\forall n \geq n_0$, ou seja, $|a_n z^n| < (1-\delta)^n, \forall n \geq n_0$. Como $\delta > 0$ então $r = 1 - \delta < 1$ e a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente, para $|z| < R$

Se $|z| > R$ então $\limsup |a_n|^{1/n}|z| = |z| \limsup |a_n|^{1/n} > R \cdot \frac{1}{R} = 1$, logo $(|a_n z^n|)$ tem uma infinidade de termos maiores que 1 e portanto a série diverge para $|z| > R$.

Note que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente em qualquer disco de raios $r < R$ (consequência do teste M de Weierstrass)

Combinando os três casos acima podemos afirmar que a série

$$\sum a_n (z-a)^n$$

converge sempre dentro do disco de raio $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$

Deixando claro que $R=0$ significa que a série só converge em $z=a$ e $R=\infty$ significa que a série converge em qualquer $z \in \mathbb{C}$. Note que o comportamento da série em $|z-a|=R$ não é mencionado.

exemplos

1) $\sum_{n \in \mathbb{N}} n z^n$. Como $\lim n^{1/n} = 1$ então $R=1$ e a série converge quando $|z|<1$ e diverge quando $|z|>1$. Nos pontos em que $|z|=1$ temos $|n z^n| = n \longrightarrow +\infty$, logo a série diverge.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ também tem raio de convergência $R=1$, porém essa série converge em todos os pontos do círculo $|z|=1$ pois $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$, para $|z|=1$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ esse é um dos exemplos mais interessantes. Claramente o raio de convergência é 1. Nos pontos em que $|z|=1$ a série converge, exceto em $|z|=1$, no qual surge a série harmônica.

Exercício: (dica: escreva $z = cis\theta$ e analise $Re\, z$ e $Im\, z$ separadamente)

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+(-1)^n\right)^n z^n$ tem raio de convergência $1/2$.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$, pois $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, além disso, essa série converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ (limitado e fechado). Essa série é denotada

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Funções Analíticas

Seja $G \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é diferenciável no ponto $a \in G$ se existe o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (*)$$

Neste caso o limite é chamado de derivada de f em a e denotado $f'(a)$.

Quando f é diferenciável em todos os pontos do aberto G, dizemos apenas que f é diferenciável em G. Neste caso faz sentido definir a função derivada $f': G \longrightarrow \mathbb{C}$.

Importante: Na definição de diferenciabilidade o número h é complexo, logo há várias formas de fazer $h \longrightarrow 0$ no plano complexo.
Por exemplo: $f(z) = \bar{z}$ não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{C}$ pois

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

Fazendo $h \longrightarrow 0$ sobre o eixo real teremos limite igual a 1, porém fazendo o mesmo sobre o eixo imaginário, teremos $h = it$, $t \in \mathbb{R}$ então

$$\frac{\overline{it}}{it} = -1, \ \forall t \neq 0$$

e o limite quando $h = it \longrightarrow 0$ é -1. Portanto o limite $(*)$ não existe.

Definição: Dizemos que a função $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ é analítica se f for continuamente diferenciável, ou seja, diferenciável em todos os pontos do aberto G e sua derivada $f': G \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínua.

Proposição: Diferenciabilidade implica continuidade

Prova: Como $\lim_{z \to a} |f(z) - f(a)| = \lim \frac{|f(z) - f(a)|}{|z-a|} \cdot |z-a|$

Se f for diferenciável em a então existe $\lim_{z \to a} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z-a|} = |f'(a)|$ e portanto

$$\lim_{z \to a} |f(z) - f(a)| = \lim_{z \to a} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z-a|} \cdot \lim_{z \to a} |z-a| = |f'(a)| \cdot 0 = 0 \ \blacksquare$$