

1ª lista de exercícios - CM068 Variáveis Complexas - 03/03/2016

1. Escreva cada um dos números complexos abaixo na forma $a + ib$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $(-2 + 3i)(1 - i)$ (c) $i^2 + 2i^3 + 3i^4$ (e) $i^2, i^3, i^4, i^5, \dots$
(b) $\frac{4+i}{6-3i}$ (d) $\left(\frac{i-1}{2i+6}\right)^3$ (f) $\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$

2. Represente graficamente os números complexos $z_1, z_2, z_1 \cdot z_2$ e z_1/z_2 nos seguintes casos:

(a) $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = \frac{1-i}{5\sqrt{2}}$ (b) $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 2 - i$

3. Encontre a parte real e a parte imaginária

(a) $\frac{i+1}{i-1}$ (c) $\frac{1}{z}$ (e) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$
(b) $\frac{z^2}{z-1}$ (d) $\frac{z-a}{z+a}, a \in \mathbb{R}$ (f) $\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)^n, 2 \leq n \leq 8.$

4. Escreva os números abaixo na forma polar.

(a) $\sqrt{3} + i$ (b) $-6 + 6i$ (c) $-8 + \pi i$ (d) -16 (e) $-3i$

5. Determine todas as soluções das equações abaixo.

(a) $z^2 = -1$ (b) $z^2 = i$ (c) $z^6 = 2 + i$ (d) $z^4 - 1 = 0$

6. Resolva a equação $z^2 + \sqrt{32}iz - 6i = 0$.

7. Prove as seguintes afirmações:

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ (e) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$
(b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ (f) $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
(c) $\overline{\overline{z}} = z$ (g) $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$
(d) $|z^n| = |z|^n, n$ natural

8. Seja $P(z)$ um polinômio com coeficientes reais. Mostre que:

(a) $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
(b) $P(z) = 0 \Leftrightarrow P(\overline{z}) = 0$ (os zeros de um polinômio com coef. reais “vêm sempre aos pares”)

9. Prove que se $|z| = |w| = 1$ e $1 + zw \neq 0$ então $\frac{z+w}{1+zw}$ é real.