4ª lista de exercícios - CM068 Variáveis Complexas - 18/04/2016

1. Descreva uma parametrização para triângulo de vértices -1, i e 1.

2. Descreva uma parametrização para o quadrado de vértices $0, i, -1+i$ e -1.

3. Para cada f e caminho γ abaixo determinar o valor de $\int_\gamma f(z)\,dz$.

   (a) $f(z) = y - x - 3x^2 i$, sendo $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$ e γ é o segmento de reta que une $z = 0$ a $z = 1+i$.

   (b) f como acima e γ é formado pelos segmento de reta que unem $z = 0$ a $z = i$ e $z = i$ a $z = 1+i$.

   (c) $f(z) = (z+2)/z$ e γ é o semicírculo de raio 2 centrado em $z = 0$ contido no semiplano $\operatorname{Im}(z) \geq 0$.

   (d) f como acima e γ é o semicírculo de raio 2 centrado em $z = 0$ contido no semiplano $\operatorname{Im}(z) \leq 0$.

   (e) f como acima e γ é o círculo de raio 2 centrado em $z = 0$.

   (f) $f(z) = |z|^4$ e γ é o segmento que liga $i-1$ a $i+1$.

4. Se γ é a fronteira do quadrado com vértices $z = 0$, $z = 1$, $z = 1+i$ e $z = i$ percorrida no sentido positivo (anti-horário), mostre que $\displaystyle\int_\gamma \pi e^{\pi \bar{z}}\,dz = 4(e^\pi - 1)$.

5. Se γ é o arco da circunferência $|z| = 2$ que está contido no primeiro quadrante, mostre, sem calcular a integral, que
$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

6. Mostre que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, sendo γ a circunferência $|z| = 1$, quando:

   (a) $f(z) = \dfrac{z^2}{z-3}$

   (b) $f(z) = ze^{-z}$.

   (c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+2}$.

   (d) $f(z) = \operatorname{senh}(z)$

   (e) $f(z) = \operatorname{tg}(z)$

   (f) $f(z) = \log(z+2)$

7. Se γ é a fronteira, orientada positivamente, da região compreendida entre a circunferência $|z| = 4$ e o quadrado com vértices $z = 1+i$, $z = -1+i$, $z = -1-i$, $z = 1-i$, mostre que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, sendo

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{3z^2+1}$

   (b) $f(z) = \dfrac{z+2}{\operatorname{sen}(z/2)}$.

   (c) $f(z) = \dfrac{z}{1-e^{-z}}$.

8. Se γ_0 é a circunferência $z - z_0 = r_0 e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $r_0 > 0$, orientada positivamente e f é contínua em γ_0, mostre que
$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = ir_o \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{i\theta}) e^{i\theta}\,d\theta.$$

9. Use o exercício anterior para mostrar que $\displaystyle\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$ e $\displaystyle\int_{\gamma_0} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0$, para $n = 2, 3, \cdots$

10. Calcule o valor das integrais abaixo, ao longo de uma caminho arbitrário ligando os limites de integração:

    (a) $\displaystyle\int_i^{i/2} e^{\pi z}\,dz$

    (b) $\displaystyle\int_0^{\pi+2i} \cos(z/2)\,dz$

    (c) $\displaystyle\int_1^3 (z-2)^3\,dz$.

11. Calcular $\int_\gamma \frac{1}{z^3(4-z)}\,dz$ sendo γ é qualquer caminho fechado que:

    (a) não contém $z = 0$ e $z = 4$ no seu interior.

    (b) contém no seu interior $z = 0$ e está contido na região $|z| < 4$.

    (c) contém no seu interior $z = 4$ e está contido na região $|z| > 3$ e que não contém $z = 0$ no seu interior.

    (d) que contém $z = 0$ e $z = 4$ no seu interior.