3ª Prova de Variáveis Complexas - Resolução

20/6/2016

1. Encontre o desenvolvimento em série de potências em torno de $z_0 = 0$ das funções abaixo:

   (a) $f(z) = \cos z^2$;

   (b) $g(z) = \dfrac{e^{2z} - 1}{z^2}$;

   (a) Como $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ então $f(z) = \cos z^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z^2)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{4n}$.

   (b) Como $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ então $g(z) = \displaystyle\frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(2z)^n - 1\right) = \frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^{n-2}$.

2. Dê um exemplo de função complexa com:

   (a) singularidade removível no ponto $z_o = i$;

   (b) singularidade essencial no ponto $z_o = i$;

   Justifique seus exemplos com base na definição ou caractrização em série de Laurent.

   Aqui há várias possíveis respostas. Recordo dois exemplos vistos em sala de aula:

   (a) $f(z) = \dfrac{z-i}{z^2+1}$ possui uma singularidade removível em $z = i$. De fato, para $z \neq i$ podemos escrever $\dfrac{z-i}{z^2+1} = \dfrac{1}{z+i}$, logo existe o limite $\lim_{z\to i} f(z) = \dfrac{1}{2i}$.

   (b) $g(z) = e^{1/(z-i)}$ possui uma singularidade essencial em $z = i$, pois sua série de Laurent em torno de $z = i$ possui uma infinidade de termos com potências negativas não nulos, $e^{1/(z-i)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-i)^{-n}$.

3. Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z^5}.$$

   (a) Encontre a série de Laurent de f em torno da origem na região $A = \{z; 0 < |z| < 1\}$;

   (b) Encontre a série de Laurent de f em torno da origem na região $B = \{z; |z| > 1\}$.

   Solução:

   (a) Se $z \in A$ então $|z| < 1$ e $\displaystyle\frac{1}{z^2 - z^5} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-z^3} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(z^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n-2}$.

   (b) Se $z \in B$ então $|1/z| < 1$ e $\displaystyle\frac{1}{z^2 - z^5} = -\frac{1}{z^5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z^3}} = -\frac{1}{z^5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{3n+5}}$.

4. Considere a função $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+9)(z-3i)}$.

   (a) Determine a ordem dos pólos de f;

   (b) Calcule os resíduos de f em cada um de seus pólos

   (c) Calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$, sendo $\gamma(t) = 1 + 4e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$.

Solução:

(a) Note que o denominador $(z^2+9)(z-3i) = (z+3i)(z-3i)^2$ tem um zero simples em $-3i$ e um zero duplo em $3i$. Como o numerador e^{iz} não se anula nesses mesmos zeros, então $z_1 = -3i$ é um pólo simples e $z_2 = 3i$ é um polo de ordem 2.

(b) Pela fórmula de resíduos para pólos temos:

$$\begin{aligned}
\text{Res } f\Big|_{z_1=-3i} &= \lim_{z\to -3i}(z+3i)f(z) = \lim_{z\to -3i}\frac{e^{iz}}{(z-3i)^2} = \frac{e^{-3i^2}}{(-3i-3i)^2} = \frac{-e^3}{36}.\\
\text{Res } f\Big|_{z_2\ =3i} &= \lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\Big((z-3i)^2 f(z)\Big) = \lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{z+3i}\right) = \lim_{z\to 3i}\frac{ie^{iz}(z+3i)-e^{iz}}{(z+3i)^2}\\
&= \frac{ie^{3i^2}(3i+3i)-e^{3i^2}}{(3i+3i)^2} = \frac{7e^{-3}}{36}.
\end{aligned}$$

(c) Como a curva γ envolve os dois pólos dessa função, pelo teorema dos resíduos temos

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(\text{Res } f\Big|_{z=-3i} + \text{Res } f\Big|_{z=3i}\right) = 2\pi i\left(\frac{-e^3}{36}+\frac{7e^{-3}}{36}\right) = \frac{\pi i}{18}\left(7e^{-3}-e^3\right).$$