2ª Prova - Complementos da Matemática - Tarde

1. Considere o conjunto $A = \{x, \{y\}, z\}$. Assinale verdadeiro (V) ou falso (F) nas alternativas abaixo. Não é preciso justificar: cada item 0,2 pt - total 3,0 pt

   a. $x \in A$. (V)
   b. $\{x\} \subset A$. (V)
   c. $x \subset A$. (F)
   d. $\{x\} \in A$. (F)
   e. $y \in A$. (F)
   f. $\{y\} \in A$. (V)
   g. $\{y\} \subset A$. (F)
   h. $\big\{\{y\}\big\} \subset A$. (V)
   i. $\{x, z\} \subset A$. (V)
   j. $\{x, y\} \subset A$. (F)
   k. $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$. (V)
   l. $\{x, y\} \in \mathcal{P}(A)$. (F)
   m. $\{x, z\} \in \mathcal{P}(A)$. (V)
   n. $\{\{y\}\} \in \mathcal{P}(A)$. (V)
   o. $\{\{x, z\}\} \in \mathcal{P}(A)$. (F)

2. Dados $B = \{0, 1\}$ e $C = \{1, 2, 3\}$. Encontre: cada item 0,5 pt - total 3,0 pt

   a. $\mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$.
   b. $\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)$.
   c. $\mathcal{P}(B \cup C)$.
   d. $B \times C$.
   e. B^3.
   f. $\mathcal{P}(B^2)$.

   Como $\mathcal{P}(C) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, C\}$ e $\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, B\}$ então

   a. $\mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C) = \Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\Big\}$.

   b. $\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C) = \Big\{\varnothing, \{1\}\Big\}$.

   c. Como $B \cup C = \{0, 1, 2, 3\}$, então $\mathcal{P}(B \cup C)$ tem 16 elementos.
   $$\mathcal{P}(B \cup C) = \Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\Big\}.$$

   d. $B \times C = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

   e. $B^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.

   f. Como $B^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ então $\mathcal{P}(B^2)$ tem 16 elementos.
   $$\mathcal{P}(B^2) = \Big\{\varnothing, \{(0, 0)\}, \{(0, 1)\}, \{(1, 0)\}, \{(1, 1)\}, \{(0, 0), (0, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0)\}, \{(0, 0), (1, 1)\}, \{(0, 1), (1, 0)\}, \{(0, 1), (1, 1)\}, \{(1, 0), (1, 1)\} \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}, \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}\Big\}.$$

3. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Quando for verdadeira demonstre e quando for falsa dê um contra-exemplo. cada item 1,0 pt - total 3,0 pt

a. Se $A \cup B = A \cup C$ então $B = C$.

Falsa. Basta tomar $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ e $C = \{0, 1\}$, então $A \cup B = A \cup C = \{0, 1\}$, porém $B \neq C$.

b. Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \cup B = B \cap C$.

Verdadeira. Basta observar que $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ e que $B \subset C \Rightarrow B \cap C = B$. Daqui segue a igualdade.

c. $A \times (B \cup C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$.

Falsa. Basta tomar $A = \varnothing$ e $B = C = \{1\}$, então $A \times (B \cup C) = \varnothing$ enquanto que $(A \cup B) \times (A \cup C) = \{1\} \times \{1\} = \{(1, 1)\}$.

4. Seja $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de conjuntos. Mostre que:

a. $A \cap (B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$. 1,0 pt

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B_1 \cup B_2) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B_1 \cup B_2 \Leftrightarrow x \in A \text{ e } (x \in B_1 \text{ ou } x \in B_2) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B_1) \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \in B_2) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B_1) \text{ ou } (x \in A \cap B_2) \Leftrightarrow x \in (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \end{aligned}$$

b. $A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_n)$. 2,0 pt

$$\begin{aligned} x \in A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \Leftrightarrow x \in A \text{ e } \big(\exists n \in \mathbb{N},\ x \in B_n\big) \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x \in A \text{ e } x \in B_n \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x \in A \cap B_n \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_n) \end{aligned}$$