

2ª Prova de Fundamentos de Análise

01/06/2017

- ◇ Faça apenas cinco questões: duas de cada tópico e a quinta do assunto que preferir;
- ◇ O notas serão divulgadas no endereço: www.ufpr.br/~akirilov.

Corpos Ordenados

1. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Mostre que:
 - (a) $a + b\sqrt{2}$ é um número irracional;
 - (b) $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$
2. Seja \mathbb{K} um corpo ordenado e $a, b \in \mathbb{K}$. Mostre que:
 - (a) $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$;
 - (b) $a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0$;
 - (c) Se $a, b \geq 0$ então $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
3. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados e não vazios. Defina $A + B \doteq \{a + b; a \in A \text{ e } b \in B\}$. Mostre que:
 - (a) $A + B$ é limitado;
 - (b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Sequências de números reais

4. Seja (x_n) uma sequência convergente com limite $L \neq 0$. Prove que:
 - (a) apenas um número finito de termos desta sequência podem ser nulos;
 - (b) (x_n) é uma a sequência limitada;
5. Defina sequência de Cauchy e prove que toda sequência de convergente é de Cauchy.
6. Sabendo que a sequência (a_n) é limitada e $\lim b_n = +\infty$, mostre que $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.