3ª Prova - Complementos da Matemática - Relações e Funções - Noite

1. Verifique (demonstrando ou dando um contra-exemplo) se as relações abaixo satisfazem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

   (a) $\forall m, n \in \mathbb{Z},\ m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m - n$ é ímpar;

   (b) $\forall A, B \subset \mathbb{N}$ não vazios, $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$

2. Defina uma relação $\mathcal{R}$ em $\mathbb{R}^*$ da seguinte forma:

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a \cdot b > 0.$$

   (a) Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$;

   (b) Obtenha as classes de equivalência $[2]_\mathcal{R}, [5]_\mathcal{R}$ e $[-1]_\mathcal{R}$;

   (c) Descreva o conjunto quociente $\mathbb{R}^*/_\mathcal{R}$.

3. Verifique se as funções abaixo são injetoras ou sobrejetoras provando ou exibindo um contra-exemplo.

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = xy + z^2$.

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(t) = (1, t, t^2)$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2y + x^2$.

   (a) Obtenha as imagens diretas $f\big(\{(0,0), (-1,1), (-2,2)\}\big)$ e $f\big([0,1] \times [1,2]\big)$.

   (b) Obtenha as imagens inversas $f^{-1}(\{0\})$ e $f^{-1}(\{2\})$.

5. Dadas $f : A \to B$ e $g : B \to C$, considere a função composta $g \circ f : A \to C$:

   (a) prove que se f e g são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva;

   (b) prove que se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva;

   (c) dê um exemplo em que f e $g \circ f$ são injetivas, mas g <u>não é</u> injetiva;