11

Cálculo com Integrais

Este capítulo é a continuação do anterior. Naquele, foi definida a integral e foram estabelecidas condições gerais que asseguram a integrabilidade de uma função. Neste, serão provadas as regras para o manuseio eficiente das integrais, entre elas o chamado Teorema Fundamental do Cálculo, uma movimentada via de mão dupla que liga derivadas a integrais. Em seguida, usaremos a integral para dar uma definição adequada do logaritmo e da exponencial. O capítulo termina com uma breve discussão das integrais impróprias.

1 Os teoremas clássicos do Cálculo Integral

Para começar, estabeleceremos a conexão entre derivada e integral.

Teorema 1. (Teorema Fundamental do Cálculo.) *Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F\colon I \to \mathbb{R}$ são equivalentes:*

(1) *F é uma integral indefinida de f, isto é, existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$, para todo $x \in I$.*

(2) *F é uma primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2). Se $x_0, x_0+h \in I$ então $F(x_0+h)-F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$ e $h \cdot f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt$, portanto

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t)-f(x_0)]\,dt.$$

Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade de f no ponto x_0, existe $\delta > 0$ tal que $t \in I$, $|t - x_0| < \delta$ implicam $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Então $0 < |h| < \delta$, $x_0 + h \in I$ implicam

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,dt$$
$$< \frac{1}{|h|}\cdot|h|\cdot\varepsilon = \varepsilon.$$

Isto mostra que $F'(x_0) = f(x_0)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Seja $F' = f$. Como acabamos de ver, se fixarmos $a \in I$ e definirmos $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, teremos $\varphi' = f$. As duas funções $F, \varphi\colon I \to \mathbb{R}$, tendo a mesma derivada, diferem por uma constante. Como $\varphi(a) = 0$, essa constante é $F(a)$. Portanto $F(x) = F(a) + \varphi(x)$, isto é, $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$ para todo $x \in I$. $\square$

Comentários. (1). Foi provado acima que toda função contínua possui uma primitiva. Mais precisamente: se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável então $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, é derivável em todo ponto $x_0 \in [a,b]$ no qual f seja contínua, e tem-se $F'(x_0) = f(x_0)$. Nesse ponto também é derivável a função $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por $G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$. Tem-se $G'(x_0) = -f(x_0)$. Com efeito, $F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)\,dt =$ constante, logo $F'(x_0) + G'(x_0) = 0$.

(2). Ficou também provado que se $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 (isto é, tem derivada contínua) então $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$. Em particular, $F(b) = F(a) + \int_a^b F'(t)\,dt$. Isto reduz o cálculo da integral $\int_a^b f(x)\,dx$ à procura de uma primitiva de f. Se $F' = f$ então $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

(3). O mesmo argumento da demonstração de que (2) $\Rightarrow$ (1) no Teorema 1 serve para provar que se a função integrável $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $c \in [a,b]$ então a função $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é derivável no ponto c, com $F'(c) = f(c)$.

Teorema 2. (Mudança de variável.) *Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ com derivada contínua e $g([c,d]) \subset [a,b]$. Então*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\cdot g'(t)\,dt.$$

Demonstração: Pelo Teorema 1, f possui uma primitiva $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e vale $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = F(g(d)) - F(g(c))$. Por outro lado, a Regra da Cadeia nos dá $(F \circ g)'(t) = F'(g(t))\cdot g'(t) = f(g(t))\cdot g'(t)$ para todo $t \in [c,d]$. Logo $F \circ g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função contínua $t \mapsto f(g(t))\cdot g'(t)$. Portanto $\int_c^d f(g(t))\cdot g'(t)\,dt = F(g(d)) - F(g(c))$. Isto prova o teorema. $\square$

Observação. O Teorema 2 é uma boa justificativa para a notação $\int_a^b f(x)\,dx$, em vez de $\int_a^b f$. Para mudar a variável em $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx$, faz-se $x = g(t)$. A diferencial de x será $dx = g'(t)\,dt$. Estas substituições dão

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\cdot g'(t)\,dt.$$

A troca nos limites de integração é natural: quando t varia de c a d, $x = g(t)$ varia de $g(c)$ a $g(d)$.

É tradicional no Cálculo a notação $F\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Teorema 3. (Integração por partes.) *Se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ têm derivadas contínuas então*

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = f\cdot g\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx.$$

Demonstração: Basta notar que $f\cdot g$ é primitiva de $f\cdot g' + f'\cdot g$ e integrar esta soma usando o Teorema Fundamental do Cálculo. $\square$

Teorema 4. (Fórmula do Valor Médio para integrais.) *Sejam $f, p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, f contínua, p integrável, com $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Existe um número $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(c)\cdot\int_a^b p(x)\,dx$.*

Demonstração: Para todo $x \in [a,b]$, temos $m \leq f(x) \leq M$, onde m é o ínfimo e M o supremo de f em $[a,b]$. Como $p(x) \geq 0$, segue-se que $m\cdot p(x) \leq f(x)\cdot p(x) \leq M\cdot p(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Seja $A = \int_a^b p(x)\,dx$.

Das últimas desigualdades resulta $m \cdot A \leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leq M \cdot A$. Como a função $A \cdot f$ é contínua, temos $\int_a^b f(x)p(x)\,dx = A \cdot f(c)$ para algum $c \in [a,b]$, o que prova o teorema. □

Corolário. *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Existe $c \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a).$$

Lema. *Se $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ possui derivada de ordem n contínua então*

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(t)\,dt.$$

Demonstração: Para $n=1$, esta fórmula reduz-se a $\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\,dt$, válida pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Para $n=2$, a integração por partes fornece

$$\int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt = (1-t)\varphi'(t)\Big]_0^1 + \int_0^1 \varphi'(t)\,dt = -\varphi'(0) + \varphi(1) - \varphi(0),$$

logo

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt.$$

Para $n=3$, novamente a integração por partes nos dá

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi'''(t)\,dt = \frac{(1-t)^2}{2}\varphi''(t)\Big]_0^1 + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt$$
$$= -\frac{\varphi''(0)}{2} + \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0),$$

logo

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi'''(t)\,dt.$$

O padrão indutivo está claro. O lema vale para todo n. □

Teorema 5. **(Fórmula de Taylor com resto integral.)** *Se $f\colon I \to \mathbb{R}$ possui derivada n-ésima contínua no intervalo cujos extremos são $a, a+h \in I$ então*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \left[\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+th)dt\right] h^n.$$

Demonstração: Definindo $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = f(a+th)$, tem-se $\varphi^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)h^i$. O Teorema 5 resulta do lema acima. □

Corolário. **(Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.)** *Se $f\colon I \to \mathbb{R}$ é de classe C^n no intervalo cujos extremos são $a, a+h \in I$ então existe $\theta \in [0,1]$ tal que*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}\cdot h^n.$$

Com efeito, chamando de A a integral do enunciado do Teorema 5, resulta do Teorema 4 que existe $\theta \in [0,1]$ tal que

$$A = f^{(n)}(a+\theta h)\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}.$$ □

Observação. Esta demonstração é mais natural do que a dada no Teorema 2, Capítulo 9, porém exige mais de f.

2 A integral como limite de somas de Riemann

A *norma* de uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\} \subset [a,b]$ é o número $|P|$ = maior comprimento $t_i - t_{i-1}$ dos intervalos de P.

Teorema 6. *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta \Rightarrow S(f;P) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P_0 = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$S(f;P_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon/2.$$

Seja $M = \sup f$. Tomemos δ com $0 < \delta < \varepsilon/2Mn$. Se P é qualquer partição de $[a,b]$ com $|P| < \delta$, indiquemos com $[r_{\alpha-1}, r_\alpha]$ os intervalos de P que estão contidos em algum $[t_{i-1}, t_i]$ de P_0 e com $[r_{\beta-1}, r_\beta]$ os restantes intervalos de P. Cada um destes contém pelo menos um ponto t_i em seu interior, logo há, no máximo, n intervalos do tipo $[r_{\beta-1}, r_\beta]$. Escrevamos $\alpha \subset i$ para significar $[r_{\alpha-1}, r_\alpha] \subset [t_{i-1}, t_i]$. Quando $\alpha \subset i$ valem $M_\alpha \leq M_i$ e $\sum_{\alpha\subset i}(r_\alpha - r_{\alpha-1}) \leq t_i - t_{i-1}$. Estes números são todos

≥ 0, logo $\sum_{\alpha\subset i} M_\alpha\cdot(r_\alpha - r_{\alpha-1}) \leq M_i\cdot(t_i - t_{i-1})$ e $M_\beta\cdot(r_\beta - r_{\beta-1}) \leq M\cdot\delta$. Portanto:

$$\begin{aligned} S(f;P) &= \sum_\alpha M_\alpha(r_\alpha - r_{\alpha-1}) + \sum_\beta M_\beta(r_\beta - r_{\beta-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) + M\cdot n\cdot\delta \\ &< S(f;P_0) + \varepsilon/2 \\ &< \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

No caso geral, como f é limitada, existe uma constante c tal que $f(x) + c \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Tomando $g(x) = f(x) + c$ temos $S(g;P) = S(f;P) + c\cdot(b-a)$ e

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + c(b-a),$$

logo recaímos no caso anterior. □

Dizer que $S(f;P) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$ equivale a $\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - S(f;P)\right| < \varepsilon$. Logo o Teorema 6 significa que $\lim_{|P|\to 0} S(f;P) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

De modo inteiramente análogo se prova que $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} s(f;P)$.

Uma *partição pontilhada* do intervalo $[a,b]$ é um par $P^* = (P,\xi)$, onde $P = \{t_0,\ldots,t_n\}$ é uma partição de $[a,b]$ e $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ é uma lista de n números escolhidos de forma que $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$ para cada $i = 1,2,\ldots,n$.

Dada uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e uma partição pontilhada P^* de $[a,b]$, tem-se a *soma de Riemann*

$$\sum(f;P^*) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Evidentemente, seja qual for o modo de pontilhar a partição P, tem-se

$$s(f;P) \leq \sum(f;P^*) \leq S(f;P).$$

Diz-se que o número real I é o *limite* de $\sum(f;P^*)$ quando $|P| \to 0$, e escreve-se $I = \lim_{|P|\to 0}\sum(f;P^*)$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $|\sum(f;P^*) - I| < \varepsilon$ seja qual for a partição pontilhada P^* com $|P| < \delta$.

Teorema 7. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0}\sum(f;P^*).$$

Demonstração: Segue-se do Teorema 6 que se f é integrável então

$$\lim_{|P|\to 0} s(f;P) = \lim_{|P|\to 0} S(f;P) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Como se tem $s(f;P) \leq \sum(f;P^*) \leq S(f;P)$, resulta imediatamente que $\lim_{|P|\to 0}\sum(f;P^*) = \int_a^b f(x)\,dx$. □

Observação. Vale a recíproca do Teorema 7, mas é menos interessante. (Veja "Curso de Análise", vol. 1, pag. 333.)

3 Logaritmos e exponenciais

Seja a um número real maior que 1. Costuma-se definir o logaritmo de um número real x na base a como o expoente $y = \log_a x$ tal que $a^y = x$. Ou seja, a função $\log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ costuma ser definida como a inversa da função exponencial $y \mapsto a^y$. Isto requer o trabalho preliminar de estabelecer o significado e as propriedades das potências a^y, onde y é um número real qualquer, o que é possível fazer rigorosamente. Mas achamos mais simples definir primeiro o logaritmo e, a partir deste, a exponencial, como faremos agora.

Definiremos a função $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pondo, para cada $x > 0$,

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

O número $\log x$ é chamado o *logaritmo* de x. Lembrando que $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, vemos que $\log x < 0$ se $0 < x < 1$, $\log 1 = 0$ e $\log x > 0$ quando $x > 1$.

A função log é monótona crescente, derivável, com $(\log)'(x) = 1/x$, $(\log)''(x) = -1/x^2$, etc. Segue-se que log é infinitamente derivável, isto é, $\log \in C^\infty$. Vê-se também que log é uma função côncava.

Teorema 8. *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *tem-se* $\log(xy) = \log x + \log y$.

Demonstração: $\log(xy) = \int_1^{xy} dt/t = \int_1^x dt/t + \int_x^{xy} dt/t = \log x + \int_x^{xy} dt/t$. Quando s varia de 1 a y, o produto xs varia de x a xy. Logo a mudança de variável $t = xs$ nos dá $dt = xds$ e $\int_x^{xy} dt/t = \int_1^y xds/xs = \int_1^y ds/s = \log y$, o que prova o teorema. □

Corolário 1. *Para todo número racional* r *tem-se* $\log(x^r) = r \cdot \log x$.

Com efeito, segue-se do Teorema 8 que $\log(x^n) = n \cdot \log x$ quando $n \in \mathbb{N}$. De $x^n \cdot x^{-n} = 1$ resulta $0 = \log(x^n \cdot x^{-n}) = \log(x^n) + \log(x^{-n}) = n \cdot \log x + \log(x^{-n})$, donde $\log(x^{-n}) = -n \log x$. Isto prova o corolário para $r \in \mathbb{Z}$. No caso geral, $r = p/q$ onde $p, q \in \mathbb{Z}$. Por definição, $(x^{p/q})^q = x^p$. Daí, pelo que já provamos, $q \cdot \log(x^{p/q}) = p \cdot \log x$, donde $\log(x^{p/q}) = (p/q) \log x$. □

Corolário 2. $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *é sobrejetiva.*

Como log é contínua, sua imagem é um intervalo, portanto basta mostrar que log é ilimitada superior e inferiormente, o que decorre das igualdades $\log(2^n) = n \cdot \log 2$ e $\log(2^{-n}) = -n \cdot \log 2$. □

Sendo uma função crescente, log é uma bijeção de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$. Sua inversa, $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é chamada a *função exponencial.* Por definição, $\exp(x) = y \Leftrightarrow \log y = x$, ou seja, $\log(\exp(x)) = x$ e $\exp(\log y) = y$.

Existe um único número real cujo logaritmo é igual a 1. Ele é indicado pelo símbolo e. Mostraremos logo mais que e coincide com o número introduzido nos Exemplos 12 e 13 do Capítulo 3. Por enquanto, sua definição é $e = \exp(1)$.

Teorema 9. *A função exponencial* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *é uma bijeção crescente, de classe* C^∞, *com* $(\exp)'(x) = \exp(x)$ *e* $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ *para* $x, y \in \mathbb{R}$ *quaisquer. Além disso, para todo* $r \in \mathbb{Q}$ *tem-se* $\exp(r) = e^r$.

Demonstração: Pela regra de derivação da função inversa, para cada $x \in \mathbb{R}$, com $\exp(x) = y$, tem-se $(\exp)'(x) = 1/(\log)'(y) = y = \exp(x)$. Assim $\exp' = \exp$, donde $\exp \in C^\infty$. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, sejam $x' = \exp(x)$ e $y' = \exp(y)$, logo $x = \log x'$ e $y = \log y'$. Então $\exp(x+y) = \exp(\log x' + \log y') = \exp[\log(x'y')] = \exp(x) \cdot \exp(y)$. Se r é racional, o Corolário 1 do Teorema 8 nos dá $\log(\exp(r)) = r = r \cdot 1 = r \cdot \log e = \log(e^r)$, donde $\exp(r) = e^r$, pela injetividade de log. □

A igualdade $\exp(r) = e^r$ para $r \in \mathbb{Q}$, juntamente com a relação $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ nos indicam que $\exp(x)$ se comporta como uma potência de base e e expoente x. Poremos então, por definição, $e^x = \exp(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Com isto, passa a ter significado a potência e^x para x real qualquer.

Com esta notação, temos

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y,\ e^0 = 1,\ e^{-x} = 1/e^x,$$
$$x < y \Leftrightarrow e^x < e^y,$$
$$\log(e^x) = x,\ e^{\log y} = y, \text{ para quaisquer } x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Temos ainda $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, como se vê facilmente.

Pelo Teorema do Valor Médio, para todo $x > 1$ existe c tal que $1 < c < x$ e $\log x = \log x - \log 1 = (\log)'(c)(x-1) = (x-1)/c$. Segue-se que $\log x < x$ para todo $x \geq 1$. Como $\log x = 2\log\sqrt{x}$, temos $0 < \log x < 2\sqrt{x}$, donde $0 < \log x/x < 2/\sqrt{x}$ para todo $x > 1$. Como $\lim_{x\to+\infty}(2/\sqrt{x}) = 0$, segue-se que $\lim_{x\to+\infty} \log x/x = 0$, fato que tinha sido provado no final do Capítulo 3 supondo $x = n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, dado qualquer polinômio $p(x)$, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} p(x)/e^x = 0.$$

Para provar isto, basta considerar o caso em que $p(x) = x^k$. Então escrevemos $e^{x/k} = y$, donde $x = k \cdot \log y$. Evidentemente, $x \to +\infty$ se, e somente se, $y \to +\infty$. Portanto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x/k}}\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(k\,\frac{\log y}{y}\right) = 0$$

e daí

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x/k}}\right)^k = 0.$$

Se c e k são constantes reais, a função $f(x) = c \cdot e^{kx}$ tem derivada $f'(x) = k \cdot c \cdot e^{kx} = k \cdot f(x)$. Esta propriedade de possuir derivada proporcional a si mesma é responsável por grande parte das aplicações da função exponencial. Mostraremos que essa propriedade é exclusiva das funções desse tipo.

Teorema 10. *Seja* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *derivável no intervalo* I, *com* $f'(x) = k \cdot f(x)$. *Se, para um certo* $x_0 \in I$, *tem-se* $f(x_0) = c$ *então* $f(x) = c \cdot e^{k(x-x_0)}$ *para todo* $x \in I$.

Demonstração: Seja $\varphi: I \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(x) \cdot e^{-k(x-x_0)}$. Então $\varphi'(x) = f'(x)e^{-k(x-x_0)} - kf(x) \cdot e^{-k(x-x_0)} = 0$. Logo φ é constante. Como $\varphi(x_0) = c$, tem-se $\varphi(x) = c$ para todo $x \in I$, ou seja, $f(x) = c \cdot e^{k(x-x_0)}$. □

Como a derivada da função $f(x) = e^x$ é ainda $f'(x) = e^x$, temos $f'(0) = 1$. Segue-se da definição de derivada que $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$.

Dados $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, definiremos a potência a^x de modo que seja válida a fórmula $\log(a^x) = x \cdot \log a$. Para isto, tomaremos esta igualdade como definição, ou seja, diremos que a^x é o (único) número real cujo logaritmo é igual a $x \cdot \log a$.

Noutras palavras, $a^x = e^{x \log a}$.

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$, tem as propriedades esperadas.

A primeira é que, para $x = p/q \in \mathbb{Q}$ (onde $q > 0$), $f(x) = \sqrt[q]{a^p}$. Com efeito, $f(x) = \exp((p/q)\log a) = \exp(\log \sqrt[q]{a^p}) = \sqrt[q]{a^p}$.

Tem-se $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^0 = 1$, $a^{-x} = 1/a^x$ e $(a^x)^y = a^{xy}$.

A função $f(x) = a^x$ tem derivada $f'(x) = a^x \cdot \log a$, portanto é de classe C^∞. A derivada f' é positiva se $a > 1$ e negativa se $0 < a < 1$. Logo f é crescente no primeiro caso e decrescente no segundo. Quando $a > 1$, tem-se $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$. Se $0 < a < 1$, os valores destes limites são trocados. Se $0 < a \neq 1$, $f(x) = a^x$ é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$, cuja inversa indica-se com $\log_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Para cada $x > 0$, $\log_a x$ chama-se o *logaritmo de x na base a*.

Assim $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. Voltamos à definição clássica. Quando $a = e$, vale $\log_e x = \log x$. O logaritmo que definimos no começo desta seção tem, portanto, base e. É o chamado *logaritmo natural*. Para todo $x > 0$, temos

$$e^{\log x} = x = a^{\log_a x} = e^{\log_a x \cdot \log a},$$

portanto $\log x = \log_a x \cdot \log a$, ou seja, $\log_a x = \log x / \log a$. Desta última fórmula resultam propriedades de $\log_a x$ análogas às de $\log x$, como $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ou $(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \cdot \log a}$.

Para finalizar esta seção, mostraremos que e coincide com o número definido nos Exemplos 12 e 13 do Capítulo 3.

A derivada da função $\log x$ é igual a $1/x$. No ponto $x = 1$ esta derivada vale 1. Isto significa que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,$$

ou seja,

$$\lim_{x\to 0} \log[(1+x)^{1/x}] = 1.$$

Como

$$(1+x)^{1/x} = \exp\{\log[(1+x)^{1/x}]\},$$

vem

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \exp(1) = e.$$

Pondo $y = 1/x$, concluímos que $\lim_{y\to\infty}(1+1/y)^y = e$.
Em particular, $\lim_{n\in\mathbb{N}}(1+1/n)^n = e$.

4 Integrais impróprias

São de dois tipos: integrais de funções ilimitadas (definidas num intervalo limitado porém não fechado) e integrais de funções definidas num intervalo ilimitado.

O teorema seguinte descarta um caso trivial.

Teorema 11. *Seja $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, tal que a restrição $f|[c,b]$ é integrável para cada $c \in (a,b]$. Então, seja qual for o valor que se atribua a $f(a)$, obtém-se uma função integrável $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, com $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx$.*

Demonstração: Seja K tal que $a \leq x \leq b \Rightarrow |f(x)| \leq K$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $c \in (a,b]$ com $K \cdot (c-a) < \varepsilon/4$. Como $f|[c,b]$ é integrável, existe uma partição P de $[c,b]$ tal que $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon/2$. Então $Q = P \cup \{a\}$ é uma partição de $[a,b]$ tal que

$$S(f;Q) - s(f;Q) \leq 2K(c-a) + S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

Logo $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável. A integral indefinida $F: [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_x^b f(t)\,dt$ cumpre a condição de Lipschitz $|F(y) - F(x)| \leq K|y-x|$ logo é (uniformemente) contínua, donde $F(a) = \lim_{c\to a+} F(c) = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$. □

Resultado análogo vale para $f: [a,b) \to \mathbb{R}$.

Basta, portanto, considerar $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ ilimitada. Suporemos também f contínua. A *integral imprópria* $\int_a^b f(x)\,dx$ é definida como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Em cada intervalo fechado $[a+\varepsilon, b]$, f é contínua, logo integrável. O problema é saber se existe ou não o limite acima. Se ele existir a integral será *convergente*; se não existir o limite a integral será *divergente*.

Evidentemente, o caso de uma função contínua ilimitada $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ se trata de modo semelhante, pondo-se $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$. Finalmente, o caso de $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ contínua reduz-se aos anteriores tomando $c \in (a,b)$ e pondo $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Exemplo 1. Seja $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x^\alpha$. Supondo $\alpha \neq 1$, temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se} \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

Quando $\alpha = 1$, temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \log x\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} (-\log\varepsilon) = +\infty.$$

Portanto $\int_0^1 dx/x^\alpha$ diverge se $\alpha \geq 1$ e converge para $(1-\alpha)^{-1}$ se $\alpha < 1$. Em particular, $\alpha = 1/2$ dá $\int_0^1 dx/\sqrt{x} = 2$.

Exemplo 2. Seja $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Então

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx/\sqrt{1-x^2} &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} dx/\sqrt{1-x^2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \text{arcsen } x\Big]_0^{1-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \text{arcsen}(1-\varepsilon) \\ &= \text{arcsen } 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Quando $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ cumpre $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b]$ então a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge se, e somente se, existe $k > 0$ tal que $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \leq k$ para todo $\varepsilon \in (0, b-a)$ pois a função $\varphi(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ é não-crescente. Se existir uma função $g\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\int_a^b g(x)\,dx$ seja convergente e $0 \leq f(x) \leq k \cdot g(x)$ para todo $x \in (a,b]$ então $\int_a^b f(x)\,dx$ converge pois, neste caso, $\varphi(\varepsilon) \leq k \cdot \int_a^b g(x)\,dx$ para todo $\varepsilon \in (0, b-a)$.

Exemplo 3. A integral $I = \int_0^1 dx/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ converge se $k \in \mathbb{R}$ cumpre $k^2 < 1$. Com efeito, como $0 \leq x \leq 1$, temos $1-k^2 \leq 1-k^2x^2$. Pondo $K = 1/\sqrt{1-k^2}$ segue-se que $1/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \leq K/\sqrt{1-x^2}$ portanto $I \leq \int_0^1 K/\sqrt{1-x^2} = K\pi/2$.

Diz-se que a integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ é *absolutamente convergente* quando $\int_a^b |f(x)|dx$ converge. Como no caso de séries, a convergência de $\int_a^b |f(x)|dx$ implica a de $\int_a^b f(x)\,dx$.

Com efeito, dada $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, definamos sua *parte positiva* e sua *parte negativa* $f_+, f_-\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ pondo, para $a < x \leq b$:

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Então $f_+(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| + f(x)]$ e $f_-(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| - f(x)]$ de modo que f_+ e f_- são contínuas. Além disso, temos $f_+(x) \geq 0$, $f_-(x) \geq 0$, $f = f_+ - f_-$ e $|f| = f_+ + f_-$, donde $f_+ \leq |f|$ e $f_- \leq |f|$. Segue-se destas desigualdades que se $\int_a^b f(x)\,dx$ é absolutamente convergente então $\int_a^b f_+(x)dx$ e $\int_a^b f_-(x)dx$ convergem. Logo $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)\,dx$ é convergente.

O critério de comparação assume então a seguinte forma: se $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ são contínuas e $\int_a^b g(x)\,dx$ converge então a condição $|f(x)| \leq k \cdot g(x)$ para todo $x \in [a,b)$ implica que $\int_a^b f(x)\,dx$ é (absolutamente) convergente. Por exemplo, se $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ é contínua e existem constantes $k > 0$ e $\alpha < 1$ tais que $|f(x)| \leq k/(b-x)^\alpha$ para todo $x \in [a,b)$ então a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é (absolutamente) convergente.

Tratemos agora de integrais sobre intervalos ilimitados.

Dada $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, define-se a integral imprópria de f pondo:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx.$$

Se o limite acima existir, a integral diz-se *convergente*. Do contrário, ela diz-se *divergente*. Uma definição análoga é dada quando $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$. Então $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{B\to-\infty} \int_B^b f(x)dx$. Finalmente, para $f\colon (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$, toma-se um ponto arbitrário $a \in \mathbb{R}$ (geralmente $a = 0$) e põe-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Exemplo 4. Seja $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^\alpha$. Se $\alpha \neq 1$ tem-se

$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{A^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, \quad \text{logo} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

converge se $\alpha > 1$. Por outro lado, se $\alpha \le 1$, $\int_1^{+\infty} dx/x^\alpha$ diverge. Isto contrasta com a integral da mesma função no intervalo $(0,1]$.

Exemplo 5. $\int_0^{+\infty} dx/(1+x^2) = \pi/2$. Com efeito, arctg x é uma primitiva de $1/(1+x^2)$. Por conseguinte

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}(\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Diz-se que uma integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é *absolutamente convergente* quando $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge. Como no caso de intervalos limitados, prova-se que, neste caso, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Vale portanto o *critério de comparação*: se $f, g\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ são contínuas, se $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge e se existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \le k \cdot g(x)$ para $x \ge a$ então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge (absolutamente). Em particular, se $|f(x)| \le k/x^\alpha$ com $\alpha > 1$ então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é (absolutamente) convergente.

Exemplo 6. Seja $a > 0$. A integral $\int_a^{+\infty} dx/x^2$ converge e, como se vê facilmente, seu valor é $1/a$. Mesmo se não soubéssemos que a derivada de arctg x é $1/(1+x^2)$, concluiríamos, por comparação, que $\int_a^{+\infty} dx/(1+x^2)$ é convergente pois $1/(1+x^2) \le 1/x^2$.

Exemplo 7. (*A função gama.*) Trata-se da função $\Gamma\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, definida para todo $t > 0$ pela integral $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}dx$. Para mostrar que a integral acima converge, a decompomos na soma $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$. A integral $\int_0^1 e^{-x}x^{t-1}dx$ converge porque $e^{-x}x^{t-1} \le 1/x^{1-t}$. A segunda parcela, $\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}dx$ converge porque $e^{-x}x^{t-1} \le 1/x^2$ para todo x suficientemente grande. Com efeito, esta desigualdade equivale a $x^{t+1}/e^x \le 1$. Ora, como sabemos, $\lim_{x\to+\infty} x^{t+1}/e^x = 0$, logo existe $a > 0$ tal que $x > a \Rightarrow x^{t+1}/e^x \le 1$. A função gama estende a noção de

fatorial, pois $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como se vê integrando por partes.

Exemplo 8. A integral de Dirichlet $I = \int_0^{+\infty} (\operatorname{sen} x/x)dx$ converge, mas não absolutamente. Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$ seja $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\operatorname{sen} x/x|dx$. Então $I = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$. É claro que $a_0 \ge a_1 \ge a_2 \ge \cdots$ e que $\lim a_n = 0$. Logo, pelo Teorema de Leibniz, a série $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n$ (e conseqüentemente a integral) converge. Por outro lado, $\int_0^{+\infty} |\operatorname{sen} x|/x\,dx$ é a soma da série $\sum_{n=0}^\infty a_n$, cujo termo a_n é a área de uma região que contém um triângulo de base $\pi/2$ e altura $2/(2n+1)\pi$. A área desse triângulo é igual a $1/2(2n+1)$. Como a série harmônica diverge, segue-se que $\sum a_n = +\infty$. (Prova-se que $\int_0^{+\infty} (\operatorname{sen} x/x)dx = \pi/2$.)

Uma aplicação bastante conhecida das integrais impróprias é o critério de convergência de séries numéricas contido no seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em qualquer livro de Cálculo.

Teorema 12. *Seja $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, monótona, não-decrescente. Para todo número natural $n \ge a$, seja $a_n = f(n)$. A série $\sum a_n$ converge se, e somente se, a integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.*

5 Exercícios

Seção 1: Os teoremas clássicos do Cálculo Integral

1. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, contínua à direita no ponto $x_0 \in [a,b)$. Prove que $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, é derivável à direita no ponto x_0, com $F'_+(x_0) = f(x_0)$. Enuncie fato análogo com "esquerda" em lugar de "direita". Dê exemplos com f integrável, descontínua no ponto x_0, nos quais:

   (a) Existe $F'(x_0)$;

   (b) Não existe $F'(x_0)$.

2. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, com f' integrável. Prove que, para quaisquer $x, c \in [a,b]$, tem-se $f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\,dt$. Conclua que o Teorema 5 vale com "integrável" em vez de "contínua".

3. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, com $f'(x) \ge 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se $\{x \in [a,b]; f'(x) = 0\}$ tem conteúdo nulo, prove que f é crescente.

4. Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ com derivada contínua, prove o Teorema do Valor Médio (Teorema 7 do Capítulo 8) como conseqüência da fórmula de mesmo nome para integrais (Corolário do Teorema 4, deste capítulo).
5. Sejam $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\alpha, \beta: I \to [a,b]$ deriváveis. Defina $\varphi: I \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$, para todo $x \in I$. Prove que φ é derivável e $\varphi'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$.
6. Sejam $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ a função do Exercício 2.3 do Capítulo 10 e $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(0) = 0$ e $g(x) = 1$ se $x > 0$. Mostre que f e g são integráveis porém $g \circ f: [0,1] \to \mathbb{R}$ não é integrável.
7. Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ com derivada integrável, seja $m = (a+b)/2$. Prove que $f(a) + f(b) = [2/(b-a)] \int_a^b [f(x) + (x-m)f'(x)]\,dx$.
8. Sejam $f, p: [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que f é contínua, p é integrável e $p(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$. Prove que se

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(a)\int_a^b p(x)\,dx,$$

então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(a) = f(c)$. Vale um resultado análogo com $f(b)$ em lugar de $f(a)$. Conclua que no Teorema 4 pode-se tomar $c \in (a,b)$ e que no Corolário do Teorema 5 pode-se exigir que $\theta \in (0,1)$. [Veja Exercício 9, Seção 4, Capítulo 10.]
9. O Exercício 3, Seção 4 do Capítulo 3 deixa em aberto o cálculo de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n}.$$

Na realidade, a fórmula de Stirling diz que, pondo $x_n = n!e^n/n^n$ e $w_n = \sqrt{2\pi n}$, tem-se $\lim x_n/w_n = 1$, portanto $\lim x_n = +\infty$. Uma demonstração mais simples para o fato de que $\lim x_n = +\infty$ pode ser feita segundo as etapas abaixo indicadas:

A. Integrando por partes, mostre que

$$\int_1^n \log x\,dx = n\log n - n + 1 = A_n \quad \text{(digamos)}.$$

B. Se B_n é a soma superior da função $\log x$ relativamente à partição $\{1, 2, \ldots, n\}$ do intervalo $[1,n]$, mostre que

$$A_n \le B_n = \sum_{k=2}^n \log k = \log n!$$

C. Uma melhor aproximação superior para a área A_n pode ser dada considerando-se, para cada $k = 2, \ldots, n$ a tangente ao gráfico de $y = \log x$ pelo ponto $x = k - 1/2$. O trapézio com base no intervalo $[k-1, k]$ do eixo x, com dois lados verticais e lado inclinado igual a essa tangente tem área $\log(k - 1/2)$. Seja $C_n = \sum_{k=2}^n \log(k-1/2)$ a soma das áreas desses trapézios. Mostre que $A_n < C_n < B_n$ para todo $n > 1$.

D. Mostre que se tem

$$B_n - C_n = \sum_{k=2}^n [\log k - \log(k-1/2)] = \sum_{k=2}^n 1/2\theta_k,$$

onde $k - 1/2 \le \theta_k \le k$.

E. Conclua que

$$\lim(B_n - A_n) \ge \lim(B_n - C_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\theta_k} = +\infty.$$

F. Observe que

$$B_n - A_n = \log n! - n\log n + n - 1 = \log(n!e^{n-1}n^{-n}),$$

portanto $\lim x_n = +\infty$.

Seção 2: A integral como limite de somas de Riemann

1. Com auxílio de somas de Riemann prove a validez dos seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{p+1}} \sum\limits_{i=1}^n i^p = \dfrac{1}{p+1}$,

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{i\pi}{n}\right) = \dfrac{2}{\pi}$.
2. Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, limitada ou não, faz sentido considerar a soma de Riemann $\sum(f; P^*)$, para toda partição pontilhada P^*. Prove que, se existe $\lim_{|P|\to 0} \sum(f; P^*)$, então f é uma função limitada.
3. Prove a recíproca do Teorema 7: se existir $\lim_{|P|\to 0} \sum(f; P^*) = L$ então a função limitada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $\int_a^b f(x)\,dx = L$.

4. Sejam $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Para toda partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ sejam $P^* = (P, \xi)$ e $P^\# = (P, \eta)$ pontilhamentos de P. Prove que

$$\lim_{|P|\to 0} \sum f(\xi_i) g(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx.$$

5. Dadas $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, para cada partição pontilhada P^* de $[a, b]$ define-se a *soma de Riemann-Stieltjes*

$$\sum(f, g; P^*) = \sum f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})].$$

Prove: se f é integrável e g possui derivada integrável então

$$\lim_{|P|\to 0} \sum(f, g; P^*) = \int_a^b f(x) g'(x)\, dx.$$

6. Dada $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$M(f; n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + ih), \quad h = \frac{(b-a)}{n},$$

a média aritmética dos valores $f(a+h), f(a+2h), \ldots, f(a+nh) = f(b)$. Prove que se a função f é integrável então

$$\lim_{n\to\infty} M(f; n) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Por este motivo, o segundo membro desta igualdade se chama o *valor médio da função* f no intervalo $[a, b]$.

7. Se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é convexa, prove que $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$.

Seção 3: Logaritmos e exponenciais

1. Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ funções contínuas, não identicamente nulas, tais que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ e $g(uv) = g(u) + g(v)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{R}^+$. Prove que existem $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = e^{ax}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = b \cdot \log x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

2. Prove que a seqüência cujo n-ésimo termo é $x_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \log n$ é decrescente e limitada, logo converge. (Seu limite é conhecido como a *constante* γ *de Euler-Mascheroni*, cujo valor aproximado é $0,5772$.)
3. Prove que $\lim_{x\to 0} x \cdot \log x = 0$.
4. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Seção 4: Integrais impróprias

1. Verifique a convergência ou divergência das integrais

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 - \cos x}, \quad \int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

2. Verifique a convergência ou divergência das integrais

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{1-e^x}.$$

3. Mostre que $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$ converge mas não absolutamente.
4. Mostre que $\int_0^{+\infty} x \cdot \operatorname{sen}(x^4)\, dx$ converge, embora a função $x \cdot \operatorname{sen}(x^4)$ seja ilimitada.
5. Seja $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, positiva, monótona não-crescente. Prove que se $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge então $\lim_{x\to+\infty} x \cdot f(x) = 0$.
6. Seja $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrável em cada intervalo limitado $[a, x]$. Prove que a integral imprópria

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

existe se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $A > 0$ tal que $A < x < y$ implica $\left| \int_x^y f(t)\, dt \right| < \varepsilon$. ("Critério de Cauchy".)

7. Prove o Teorema 12.