12

Seqüências e Séries de Funções

Em vários problemas da Matemática e das suas aplicações busca-se uma função que cumpra certas condições dadas. É freqüente, nesses casos, obter-se uma seqüência de funções $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, cada uma das quais cumpre as condições exigidas apenas aproximadamente, porém com aproximações cada vez melhores. Então a função-limite dessa seqüência deverá cumprir as tais condições, caso aconteça o melhor. Isto leva ao estudo de limites de seqüências de funções. Muitas vezes cada função da seqüência obtém-se da anterior somando-se uma função g_n. Neste caso, tem-se uma série de funções $\sum g_n$. Seqüências e séries de funções serão estudadas neste capítulo.

Para seqüências e séries de números há apenas uma noção de limite. Mas para funções há várias. Aqui examinaremos as duas noções mais comuns de convergência, que definiremos a seguir.

1 Convergência simples e convergência uniforme

Diz-se que uma seqüência de funções $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *converge simplesmente* para a função $f \colon X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $x \in X$, a seqüência de números $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ converge para $f(x)$.

Assim, $f_n \to f$ simplesmente em X quando, dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo de ε e de x) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Graficamente, em cada reta vertical que passa por um ponto $x \in X$ fica determinada uma seqüência de pontos $(x, f_1(x)), \ldots, (x, f_n(x)), \ldots$ interseções dessa reta com os gráficos de $f_1, \ldots, f_n, \ldots$. Estes pontos convergem para $(x, f(x))$, interseção da reta vertical com o gráfico de f.

Exemplo 1. A seqüência de funções $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = x/n$, converge simplesmente para a função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é identicamente nula. Com efeito, para todo $x \in \mathbb{R}$ fixado, tem-se $\lim\limits_{n\to+\infty} (x/n) = 0$.

Um tipo de convergência de funções mais restrito do que a convergência simples, é a convergência uniforme, que definiremos agora.

Uma seqüência de funções $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente* para a função $f \colon X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependento apenas de ε) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ seja qual for $x \in X$.

No plano $\mathbb{R}^2$, dado $\varepsilon > 0$, a *faixa de raio* ε em torno do gráfico de f é o conjunto

$$F(f;\varepsilon) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in X, f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}.$$

Dizer que $f_n \to f$ uniformemente em X significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o gráfico de f_n, para todo $n > n_0$, está contido na faixa de raio ε em torno do gráfico de f.

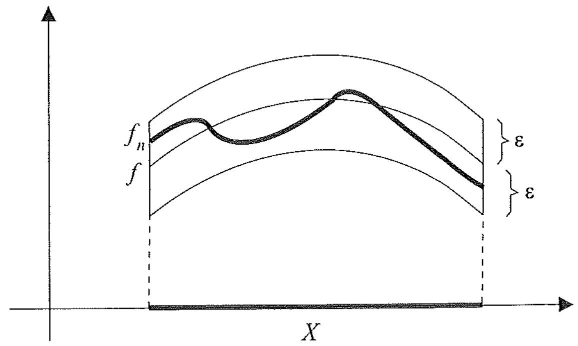

Figura 10: O gráfico de f_n está contido na faixa $F(f;\varepsilon)$.

Exemplo 2. Nenhuma faixa de raio ε em torno do eixo das abcissas (gráfico da função identicamente nula) pode conter o gráfico de uma função $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x/n$. Logo a seqüência (f_n) do Exemplo 1 não converge uniformemente para zero em $\mathbb{R}$. Por outro lado, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado, digamos com $|x| \le c$ para todo $x \in X$, então $f_n \to 0$ uniformemente em X. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 > c/\varepsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| = |x|/n < c/n_0 < \varepsilon$.

Exemplo 3. A seqüência de funções contínuas $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, converge simplesmente para a função descontínua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ se $0 \le x < 1$, $f(1) = 1$. A convergência é uniforme em todo intervalo da forma $[0, 1-\delta]$, $0 < \delta < 1$ mas não é uniforme em $[0,1]$. Estas duas afirmações decorrem de fatos gerais (a saber, os Teoremas 1 e 2 abaixo) mas podem ser facilmente provadas a partir da definição. Com efeito, escrevendo $a = 1-\delta$, temos $0 < a < 1$ logo $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a^n < \varepsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow 0 < f_n(x) \le a^n < \varepsilon$ para todo $x \in [0,a]$. Portanto $f_n \to 0$ uniformemente no intervalo $[0, 1-\delta]$. Por outro lado, tomando $\varepsilon = 1/2$, afirmamos que, seja qual for $n_0 \in \mathbb{N}$, existem pontos $x \in [0,1)$ tais que $|f_{n_0}(x) - f(x)| \ge 1/2$, ou seja, $x^{n_0} \ge 1/2$. Basta observar que $\lim_{x\to 1^-} x^{n_0} = 1$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $1 - \delta < x < 1 \Rightarrow x^{n_0} > 1/2$. Isto mostra que f_n não converge uniformemente para f no intervalo $[0,1]$.

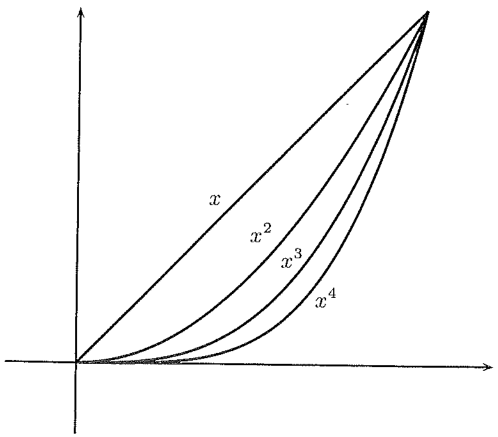

Figura 11: As funções $f_n(x) = x^n$ convergem simplesmente no intervalo $[0,1]$ para uma função descontínua.

Exemplo 4. A seqüência de funções contínuas $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ converge simplesmente para a função identicamente nula.

Esta convergência não é uniforme. Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $f_n(\sqrt[n]{1/2}) = 1/4$. Logo, para $\varepsilon < 1/4$, nenhuma função f_n tem seu gráfico contido na faixa de raio ε em torno da função 0. Por outro lado, se $0 < \delta < 1$, temos $f_n \to 0$ uniformemente no intervalo $[0, 1-\delta]$ pois $x^n \to 0$ uniformemente nesse intervalo e $0 \le x^n(1-x^n) \le x^n$.

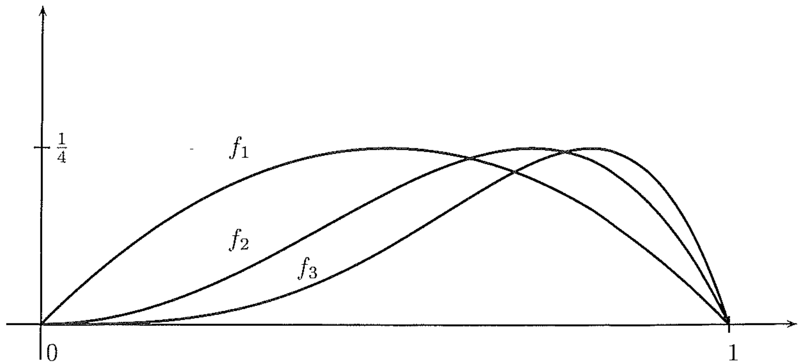

Figura 12

As considerações feitas nesta seção incluem a soma $f = \sum f_n$ de uma série de funções $f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Neste importante caso particular, tem-se $f = \lim s_n$, onde $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Dizer que a série $\sum f_n$ converge uniformemente significa, portanto, que a seqüência (s_n) converge uniformemente e equivale a afirmar que a seqüência de funções $r_n\colon X \to \mathbb{R}$ ("restos" da série), definidas por $r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots$, converge uniformemente para zero. Com efeito, basta observar que $r_n = f - s_n$.

2 Propriedades da convergência uniforme

Teorema 1. *Se uma seqüência de funções $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f\colon X \to \mathbb{R}$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in X$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ para todo $x \in X$. Fixemos um número natural $n > n_0$. Como f_n é contínua no ponto a, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| <$

$\delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon/3$, donde

$$|f(x) - f(a)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Isto prova o teorema. □

Exemplo 5. A seqüência de funções contínuas $f_n(x) = x^n$ não pode convergir uniformemente em $[0,1]$ pois converge simplesmente para a função descontínua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$, $f(1) = 1$. Já a seqüência de funções contínuas $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ converge simplesmente no intervalo $[0,1]$ para a função 0, que é contínua mas nem por isso a convergência é uniforme. Mesma observação pode ser feita sobre a seqüência de funções contínuas $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x/n$. A esse respeito, vale o teorema abaixo. Antes de demonstrá-lo, daremos uma definição.

Diz-se que uma seqüência de funções $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ *converge monotonicamente* para a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in X$, a seqüência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona e converge para $f(x)$. Assim, por exemplo, as seqüências dos Exemplos 1 e 3 convergem monotonicamente.

É claro que se $f_n \to f$ monotonicamente em X então $|f_{n+1}(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2. (Dini.) *Se a seqüência de funções contínuas $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ converge monotonicamente para a função contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$ no conjunto compacto X então a convergência é uniforme.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, ponhamos $X_n = \{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como f_n e f são contínuas, cada X_n é compacto. A monotonicidade da convergência, por sua vez, implica $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots$. Finalmente, como $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, vemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \varnothing$. Segue-se do Teorema 9, Capítulo 5, que algum X_{n_0} (e portanto todo X_n com $n > n_0$) é vazio. Isto significa que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ seja qual for $x \in X$. □

Exemplo 6. A seqüência de funções contínuas $f_n\colon [0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, converge monotonicamente para a função (contínua) identicamente nula no conjunto não-compacto $[0,1)$ mas a convergência não é uniforme. Com efeito, dado $0 < \varepsilon < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existem pontos $x \in [0,1)$ tais que $x^n > \varepsilon$, pois $\lim\limits_{x\to 1-} x^n = 1 > \varepsilon$.

Teorema 3. (Passagem ao limite sob o sinal de integral.) *Se a seqüência de funções integráveis $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ então f é integrável e*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Noutras palavras: $\int_a^b \lim_n f_n = \lim_n \int_a^b f_n$ se a convergência é uniforme.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/4(b-a)$ para todo $x \in [a,b]$. Fixemos $m > n_0$. Como f_m é integrável, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que, indicando com ω_i e ω_i' respectivamente as oscilações de f e f_m no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P, tem-se $\sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/2$. Mas, para $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ quaisquer, vale:

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \omega_i' + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Portanto $\omega_i \leq \omega_i' + \varepsilon/2(b-a)$. Segue-se que

$$\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) + [\varepsilon/2(b-a)] \sum (t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isto mostra que f é integrável. Além disso,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leq \frac{(b-a)\varepsilon}{4(b-a)} < \varepsilon$$

se $n > n_0$. Conseqüentemente, $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. □

Observação. Se cada f_n é contínua, a demonstração se simplifica consideravelmente pois f então é contínua, donde integrável.

Exemplo 7. Se uma seqüência de funções integráveis $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, pode ocorrer que f não seja integrável. Por exemplo, se $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ for uma enumeração dos números racionais de $[a, b]$ e definirmos f_n como a função que assume o valor 1 nos pontos $r_1, \ldots, r_n$ e é zero nos demais pontos de $[a, b]$ então (f_n) converge simplesmente para uma função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$ e $f(x) = 0$ se x é irracional. Evidentemente, cada f_n é integrável mas f não é.

Exemplo 8. Mesmo quando a seqüência de funções integráveis $f_n: [a, b] \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função integrável $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, pode ocorrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \neq \int_a^b f(x)\, dx$. Por exemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n: [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = nx^n(1 - x^n)$. Então $f_n(1) = 0$ e $0 \leq f_n(x) < nx^n$ se $0 \leq x < 1$. Ora, $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$ se $0 \leq x < 1$. (Pelo Exemplo 8, Capítulo 3, pois $\lim_{n\to\infty}(n+1)x^{n+1}/nx^n = x < 1$.) Portanto (f_n) converge simplesmente em $[0, 1]$ para a função identicamente nula. Entretanto $\int_0^1 f_n(x)\, dx = n^2/(n + 1)(2n + 1)$, portanto $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 1/2$, enquanto $\int_0^1 \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right) = 0$.

Para que se tenha a derivada do limite igual ao limite das derivadas, em vez de supor que $f_n \to f$ uniformemente, deve-se postular que a seqüência das derivadas convirja uniformemente.

Teorema 4. (Derivação termo a termo.) *Seja (f_n) uma seqüência de funções de classe C^1 no intervalo $[a, b]$. Se, para um certo $c \in [a, b]$, a seqüência numérica $(f_n(c))$ converge e se as derivadas f_n' convergem uniformemente em $[a, b]$ para uma função g então (f_n) converge em $[a, b]$ uniformemente para uma função f, de classe C^1, tal que $f' = g$. Em resumo:* $(\lim f_n)' = \lim f_n'$ *desde que as derivadas f_n' convirjam uniformemente.*

Demonstração: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, para cada $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [a, b]$ temos $f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)\, dt$. Fazendo $n \to \infty$ vemos, pelo Teorema 3, que existe $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e vale $f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)\, dt$. Além disso, pelo Teorema 1, g é contínua logo (novamente em virtude do Teorema Fundamental do Cálculo) f é derivável e $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Em particular, f' é contínua, isto é, f é de classe C^1. Resta apenas provar que a convergência $f_n \to f$ é uniforme. Ora,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(c) - f(c)| + \int_c^x |f_n'(t) - g(t)|\, dt.$$

Como $f_n' \to g$ uniformemente, resulta daí que $f_n \to f$ uniformemente. □

Exemplo 9. A seqüência de funções $f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)/n$ converge uniformemente para zero em toda a reta. Mas a seqüência de suas derivadas $f_n'(x) = \cos(nx)$ não converge, sequer simplesmente, em intervalo algum. (Todo intervalo contém um número da forma $x = m\pi/p$, com m, p inteiros. Então $\cos(nx)$ assume infinitas vezes os valores 1 e -1.)

Os teoremas acima, no caso de uma série $\sum f_n$, assumem as seguintes formas:

1. Se $\sum f_n$ converge uniformemente para f e cada f_n é contínua no ponto a então f é contínua no ponto a.
2. Se cada termo $f_n: X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, com $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ e a série $\sum f_n$ converge para uma função contínua $f: X \to \mathbb{R}$ no compacto X então a convergência é uniforme.
3. Se cada $f_n: [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $\sum f_n$ converge uniformemente para $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ então f é integrável e $\int_a^b \sum f_n(x)\, dx = \sum \int_a^b f_n(x)\, dx$.
4. Se cada $f_n: [a, b] \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, se $\sum f_n'$ converge uniformemente em $[a, b]$ e se, para algum $c \in [a, b]$, a série $\sum f_n(c)$ converge então $\sum f_n$ converge uniformemente para uma função de classe C^1 e $\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$.

Exemplo 10. A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^2/(1 + x^2)^n$, cujos termos são funções contínuas, definidas em toda a reta, converge para a soma $1 + x^2$, para todo $x \neq 0$. No ponto $x = 0$, todos os termos da série se anulam, logo sua soma é zero. Segue-se que a série dada converge simplesmente em toda a reta mas a convergência não é uniforme, pois a soma é uma função descontínua.

O teorema básico sobre convergência uniforme de séries de funções, demonstrado a seguir, não tem análogo para seqüências.

Teorema 5. (Teste de Weierstrass.) *Dada a seqüência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$, seja $\sum a_n$ uma série convergente de números reais $a_n \geq 0$ tais que $|f_n(x)| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Nestas condições, as séries $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes.*

Demonstração: Pelo critério de comparação, para todo $x \in X$ a série $\sum |f_n(x)|$ (e portanto a série $\sum f_n(x)$) é convergente. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>n_0} a_n < \varepsilon$. Pondo

$$R_n(x) = \sum_{k>n} |f_k(x)| \quad \text{e} \quad r_n(x) = \sum_{k>n} f_k(x),$$

tem-se imediatamente $|r_n(x)| \leq R_n(x) \leq \sum_{k>n} a_k < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Logo $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes. $\square$

3 Séries de potências

As funções mais importantes da Análise podem ser expressas como somas de séries da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots .$$

Estas séries, que constituem uma generalização natural dos polinômios, são chamadas de *séries de potências*.

Para simplificar a notação, trataremos de preferência o caso em que $x_0 = 0$, isto é, as séries de potências do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

O caso geral reduz-se a este pela mudança de variável $y = x - x_0$. Os resultados que obtivermos para as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ podem ser facilmente adaptados para o caso $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.

O primeiro fato a destacar sobre uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ é que o conjunto dos valores de x para os quais ela converge é um intervalo de centro x_0. Esse intervalo pode ser limitado (aberto, fechado ou semi-aberto), igual a $\mathbb{R}$ ou até mesmo reduzir-se a um único ponto. Isto será demonstrado logo a seguir. Antes vejamos um exemplo que ilustra todas essas possibilidades.

Exemplo 11. Pelo teste de d'Alembert, a série $\sum x^n/n!$ converge para todo valor de x. A série $\sum[(-1)^n/(2n+1)]x^{2n+1}$ converge se, e somente se, $x \in [-1,1]$. A série $\sum[(-1)^{n+1}/n]x^n$ converge se $x \in (-1,1]$ e diverge fora desse intervalo. O conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série geométrica $\sum x^n$ converge é o intervalo aberto $(-1,1)$. Finalmente, a série $\sum n^n x^n$ converge apenas no ponto $x = 0$.

Dada uma série de potências $\sum a_n x^n$, a localização dos pontos x para os quais ela converge se faz por meio do teste de Cauchy (Teorema 6, Capítulo 4), o qual põe em evidência o comportamento da seqüência $(\sqrt[n]{|a_n|})$.

Se a seqüência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é ilimitada então a série $\sum a_n x^n$ converge apenas quando $x = 0$. Com efeito, para todo $x \neq 0$ a seqüência de números $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\sqrt[n]{|a_n|}$ é ilimitada e o mesmo ocorre com $|a_n x^n|$, logo o termo geral da série $\sum a_n x^n$ não tende a zero.

Se, entretanto, a seqüência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é limitada então o conjunto

$$R = \{\rho > 0;\ \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ suficientemene grande}\}$$

é não-vazio. Na realidade, é fácil ver que se $\rho \in R$ e $0 < x < \rho$ então $x \in R$. Logo R é um intervalo, do tipo $(0,r)$, $(0,r]$ ou $(0,+\infty)$, onde $r = \sup R$. O número r é chamado o *raio de convergência* da série $\sum a_n x^n$. (Convencionaremos escrever $r = +\infty$ quando R for ilimitado.)

O raio de convergência r da série de potências $\sum a_n x^n$ goza das seguintes propriedades:

1) Para todo $x \in (-r,r)$ a série $\sum a_n x^n$ *converge absolutamente*. Com efeito, tomando ρ tal que $|x| < \rho < r$ temos $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$, e conseqüentemente $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\sqrt[n]{|a_n|} < |x|/\rho < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Logo $\sum a_n x^n$ converge absolutamente, pelo teste de Cauchy.

2) Se $|x| > r$ então a série $\sum a_n x^n$ *diverge*. Com efeito, neste caso $|x| \notin R$, logo não se tem $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/|x|$ para todo n suficientemente grande. Isto significa que $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1/|x|$, e conseqüentemente $|a_n x^n| \geq 1$, para uma infinidade de valores de n. Logo o termo geral da série $\sum a_n x^n$ não tende a zero, e ela diverge.

3) Se $x = \pm r$, nada se pode dizer em geral: a série $\sum a_n x^n$ pode convergir ou divergir, conforme o caso.

4) Se existir $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ então $r = 1/L$. (Entendendo-se que $r = +\infty$ se $L = 0$.) Com efeito, para todo $\rho \in R$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$. Fazendo $n \to \infty$ obtemos $L \leq 1/\rho$, donde $\rho \leq 1/L$. Segue-se que $r = \sup R \leq 1/L$. Supondo, por absurdo, que fosse $r < 1/L$, tomaríamos c tal que $r < c < 1/L$, donde $L < 1/c$. Pela definição de limite, teríamos $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/c$ para todo n suficientemente grande, donde $c \in R$ e daí $c \leq r$, uma contradição. Logo $r = 1/L$.

Podemos resumir a análise feita acima no

Teorema 6. *Uma série de potências $\sum a_n x^n$, ou converge apenas para $x = 0$ ou existe r, com $0 < r \leq +\infty$, tal que a série converge absolutamente no intervalo aberto $(-r,r)$ e diverge fora do intervalo fechado*

$[-r, r]$. *Nos extremos $-r$ e r, a série pode convergir ou divergir. Se existir $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ então $r = 1/L$. O número r chama-se o raio de convergência da série. Além disso, tem-se $0 < \rho < r \Leftrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.*

Observação. Segue-se do Teorema 7, Capítulo 4, que se os coeficientes a_n forem diferentes de zero e existir $\lim |a_{n+1}|/|a_n| = L$, então o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$ é $r = 1/L$.

Teorema 7. *Uma série de potências $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em todo intervalo compacto $[-\rho, \rho]$, onde $0 < \rho <$ raio de convergência.*

Demonstração: A série $\sum a_n \rho^n$ é absolutamente convergente e, para todo $x \in [-\rho, \rho]$, tem-se $|a_n x^n| \leq |a_n|\rho^n$. Pelo teste de Weierstrass (Teorema 5), segue-se que a série $\sum a_n x^n$ converge uniformemente no intervalo $[-\rho, \rho]$. □

Corolário. *Se $r > 0$ é o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$, a função $f\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é contínua.*

Exemplo 12. A série $\sum a_n x^n$ pode não convergir uniformemente em todo o intervalo $(-r, r)$, onde r é o raio de convergência. Isto é claro no caso da série $\sum x^n/n!$, cujo raio de convergência é infinito, para a qual $r_n(x) = \sum_{k>n} x^k/k! > x^{n+1}/(n+1)!$ quando x é positivo. Dado $\varepsilon > 0$, não importa qual n se tome, é impossível ter $r_n(x) < \varepsilon$ para todo x positivo.

Teorema 8. (Integração termo a termo.) *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. Se $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$ então*

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum a_n x^n\right) dx = \sum \frac{a_n}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

Demonstração: A convergência de $\sum a_n x^n$ é uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$ pois se escrevermos $\rho = \max\{|\alpha|, |\beta|\} < r$ teremos $[\alpha, \beta] \subset [-\rho, \rho]$. Logo é permitido integrar termo a termo, pelo Teorema 3. □

Teorema 9. (Derivação termo a termo.) *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$. A função $f\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$, é derivável, com $f'(x) = \sum_{n=1}^\infty n \cdot a_n x^{n-1}$ e a série de potências de $f'(x)$ ainda tem raio de convergência r.*

Demonstração: Seja r' o raio de convergência da série $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$, a qual converge se, e somente se, $x \cdot \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} n a_n x^n$ converge. Logo r' é também o raio de convergência desta última série. Abreviemos a expressão "para todo n suficientemente grande" por "$n \gg 1$". Se $0 < \rho < r$ então, tomando c com $0 < \rho < c < r$, temos $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/c$, $n \gg 1$. Por outro lado, como $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, vale $\sqrt[n]{n} < c/\rho$, $n \gg 1$. Multiplicando as duas últimas desigualdades, vem $\sqrt[n]{|na_n|} < 1/\rho$, $n \gg 1$. Portanto, $0 < \rho < r \Rightarrow 0 < \rho < r'$. Como é óbvio que $0 < \rho < r' \Rightarrow 0 < \rho < r$, concluímos que $r = r'$. Assim, as séries de potências $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ têm o mesmo raio de convergência. Fixado qualquer $x \in (-r, r)$, tomamos ρ tal que $|x| < \rho < r$. Ambas as séries convergem uniformemente em $[-\rho, \rho]$ logo, pelo Teorema 4, temos $f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$. □

Corolário 1. *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. A função $f\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é de classe C^∞. Para quaisquer $x \in (-r, r)$ e $k \in \mathbb{N}$ tem-se*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Em particular, $a_k = f^{(k)}(0)/k!$.

Portanto, $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ é o polinômio de Taylor de ordem n da função $f(x) = \sum a_n x^n$ em torno do ponto $x = 0$.

Corolário 2. (Unicidade da representação em Série de Potências.) *Sejam $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$ séries de potências convergentes no intervalo $(-r, r)$ e $X \subset (-r, r)$ um conjunto tendo 0 como ponto de acumulação. Se $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n$ para todo $x \in X$ então $a_n = b_n$ para todo $n \geq 0$.*

Com efeito, a hipótese assegura que as funções $f, g\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \sum a_n x^n$ e $g(x) = \sum b_n x^n$, têm as mesmas derivadas, $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Logo $a_n = f^{(n)}(0)/n! = g^{(n)}(0)/n! = b_n$ para todo $n \geq 0$. □

4 Funções trigonométricas

Mostraremos agora, de modo sucinto, como se podem definir precisamente as funções trigonométricas sem apelo à intuição geométrica.

As série de potências

$$c(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{e} \quad s(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

têm raio de convergência infinito logo definem funções $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ambas de classe C^∞.

É imediato que $c(0) = 1$, $s(0) = 0$, $c(-x) = c(x)$ e $s(-x) = -s(x)$. Derivando termo a termo, vem $s'(x) = c(x)$ e $c'(x) = -s(x)$.

A função $f(x) = c(x)^2 + s(x)^2$ tem derivada igual a

$$2cc' + 2ss' = -2cs + 2cs = 0,$$

logo é constante. Como $f(0) = 1$, concluimos que $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De maneira análoga se provam as fórmulas de adição

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y),$$

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y).$$

Basta fixar $y \in \mathbb{R}$ e definir as funções $f(x) = s(x+y) - s(x)c(y) - c(x)s(y)$ e $g(x) = c(x+y) - c(x)c(y) + s(x)s(y)$. Tem-se $f' = g$ e $g' = -f$. Daí resulta que $f^2 + g^2$ tem derivada identicamente nula, logo é constante. Como $f(0) = g(0) = 0$, segue-se que $f(x)^2 + g(x)^2 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $f(x) = g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e as fórmulas estão provadas.

Afirmamos agora que deve existir algum $x > 0$ tal que $c(x) = 0$. Do contrário, como $c(0) = 1$, teríamos $c(x) > 0$ para todo $x > 0$ e, como c é a derivada de s, a função s seria crescente na semi-reta $\mathbb{R}^+$. Então, para qualquer $x > 1$ valeria $c(x) = c(1) - \int_1^x s(t)dt > 0$, donde $c(1) > \int_1^x s(t)dt > s(1)(x-1)$, a última desigualdade resultando de s ser crescente. Mas a desigualdade $c(1) > s(1)(x-1)$ para todo $x > 1$ é absurda. (Note que $s(1) > 0$ pois s é crescente.) Logo deve existir algum $x > 0$ para o qual $c(x) = 0$.

O conjunto dos números $x \geq 0$ tais que $c(x) = 0$ é fechado porque c é contínua. Logo possui um menor elemento, o qual não é zero porque $c(0) = 1$. Chamaremos $\pi/2$ este menor número positivo para o qual se tem $c(\pi/2) = 0$.

Veremos agora que as funções $c(x)$ e $s(x)$ são periódicas, com período 2π. Com efeito, a segunda fórmula de adição dá: $c(2x) = c(x)^2 - s(x)^2 = 2c(x)^2 - 1$, logo $c(\pi) = -1$ e $c(2\pi) = 1$ e daí $s(\pi) = s(2\pi) = 0$. Novamente as fórmulas de adição mostram que $s(x + 2\pi) = s(x)$ e $c(x + 2\pi) = c(x)$, o que prova a alegação feita.

As notações usuais para estas funções são $c(x) = \cos x$ e $s(x) = \operatorname{sen} x$.

Este pequeno resumo justifica o uso das funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ em Análise. A partir daí se definem as demais funções trigonométricas da maneira habitual: $\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \cos x$, $\sec x = 1/\cos x$, etc.

Em particular, $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x / x = 1$ porque, sendo $\operatorname{sen} 0 = 0$, este limite é a derivada de $\operatorname{sen} x$ no ponto $x = 0$, a qual é igual a $\cos 0$, ou seja, 1.

5 Séries de Taylor

Quando a série de potências $\sum a_n(x - x_0)^n$ tem raio de convergência $r > 0$, diz-se que ela é a *série de Taylor*, em torno do ponto x_0, da função $f\colon (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$. Esta denominação se deve ao fato de que a soma dos primeiros $n+1$ termos desta série constitui o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto x_0. Veremos agora as séries de Taylor de algumas funções conhecidas. Às vezes a série de Taylor de uma função em torno do ponto $x_0 = 0$ chama-se "Série de Maclaurin" mas não adotaremos esta terminologia.

1. Funções seno e cosseno

Suas séries de Taylor em torno do ponto $x = 0$ são

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{e} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

em virtude da própria definição dessas funções.

2. Função $1/(1-x)$

A série de potências $1 + x + x^2 + \cdots$ é uma série geométrica. Ela converge para a soma $1/(1-x)$ quando $|x| < 1$, e diverge quando $|x| \geq 1$. Logo é a série de Taylor da função $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/(1-x)$.

Segue-se que $1 - x + x^2 - \cdots = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$ é a série de Taylor da função $1/(1+x)$, convergente para $|x| < 1$ e divergente se $|x| \geq 1$.

Também resulta daí que $1 - x^2 + x^4 - \cdots = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$ é a série de Taylor da função $g(x) = 1/(1+x^2)$ em torno do ponto $x = 0$. Neste caso, a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ porém sua série de Taylor converge apenas no intervalo $(-1,1)$. (Este fenômeno está ligado ao fato de que a função de variável complexa $g(z) = 1/(1+z^2)$ não está definida nos pontos $z = \pm\sqrt{-1}$, ambos de valor absoluto igual a 1.)

Se desejarmos desenvolvimentos finitos poderemos escrever respectivamente

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1.$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}, \quad x \neq -1.$$
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Em cada uma das expressões acima, a última parcela é o resto da fórmula de Taylor. Com efeito, se chamarmos r, s e t essas últimas parcelas, vemos facilmente que

$$\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{s(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{t(x)}{x^{2n}} = 0.$$

3. Função exponencial

A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$, logo a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, é de classe C^∞. Derivando termo a termo, vemos que $f'(x) = f(x)$. Como $f(0) = 1$, segue-se do Teorema 10, Capítulo 11, que $f(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

é a série de Taylor da função exponencial em torno do ponto $x = 0$.

4. Função logaritmo

Como $\log x$ não tem sentido para $x = 0$, consideraremos a função $\log(1+x)$, definida para todo $x > -1$. Por definição, $\log(1+x) = \int_0^x dt/(1+t)$. Integrando termo a termo a série de Taylor de $1/(1+x)$, vista cima, obtemos

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},$$

série de Taylor de $\log(1+x)$, convergente no intervalo aberto $(-1,1)$, pois 1 é seu raio de convergência. Acontece que, pelo Teorema de Leibniz (Teorema 3, Capítulo 4) esta série converge também para $x = 1$ (mas diverge para $x = -1$). Seria interessante saber se a função $f\colon (-1,1] \to \mathbb{R}$,

definida por $f(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}x^n/n$, a qual coincide com $\log(1+x)$ quando $|x| < 1$, também coincide com $\log(1+x)$ no ponto $x = 1$. Isto é verdade, conforme mostraremos agora. Com efeito, integrando termo a termo o desenvolvimento finito de $1/(1+x)$ visto acima, obtemos (indo até a ordem n em vez de $n+1$):

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x),$$

onde

$$r_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt.$$

Para $x = 1$, temos $|r_n(1)| \leq \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$.

Portanto $\lim_{n\to\infty} r_n(1) = 0$. Segue-se que

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

Esta é uma expressão interessante de $\log 2$ como soma de uma série alternada. Ela mostra que a série de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n/n$ representa $\log(1+x)$ no intervalo $(-1,1]$.

5. Função arctg x

Sabe-se do Cálculo que a função $\operatorname{tg}\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ é uma bijeção C^∞, com derivada positiva, e que sua inversa $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ tem derivada igual a $1/(1+x^2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O desenvolvimento de $\operatorname{tg} x$ em série de Taylor é complicado, enquanto o de $\operatorname{arctg} x$ é bem mais simples, por isso o exporemos agora. Temos $\operatorname{arctg} x = \int_0^x dt/(1+t^2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Quando $|x| < 1$, podemos integrar termo a termo o desenvolvimento de Taylor de $1/(1+x^2)$ visto acima, obtendo

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Este argumento (integração termo a termo) garante a validez da igualdade acima quando $-1 < x < 1$. Acontece que a série em questão converge também nos pontos $x = 1$ e $x = -1$. É natural, portanto, esperar que o desenvolvimento de $\operatorname{arctg} x$ em série de Taylor seja válido em todo o intervalo fechado $[-1,1]$. Para ver isto, integramos o desenvolvimento finito de $1/(1+x^2)$ obtendo

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + r_n(x),$$

onde $r_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt$.

Para todo $x \in [-1,1]$ temos

$$|r_n(x)| \le \int_0^{|x|} t^{2n}\, dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \le \frac{1}{2n+1},$$

logo $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, portanto vale a igualdade

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

para todo $x \in [-1,1]$. Em particular, para $x = 1$, obtemos a *fórmula de Leibniz*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

6 Exercícios

Seção 1: Convergência simples e convergência uniforme

1. Mostre que a seqüência de funções $f_n\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = x^n/(1+x^n)$, converge simplesmente. Determine a função limite, mostre que a convergência não é uniforme.
2. Prove que a seqüência do exercício anterior converge uniformemente em todos os intervalos do tipo $[0, 1-\delta]$ e $[1+\delta, +\infty)$, $0 < \delta < 1$.
3. Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$ converge quando x pertence ao intervalo $(-1,1]$. A convergência é uniforme em todos os intervalos do tipo $[-1+\delta, 1-\delta]$, onde $0 < \delta < 1/2$.
4. A fim de que a seqüência de funções $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ convirja uniformemente, é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in X$. (Critério de Cauchy.)
5. Se a seqüência de funções $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f\colon X \to \mathbb{R}$, prove que f é limitada se, e somente se, existem $K > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| \le K$ para todo $x \in X$.
6. Se a seqüência de funções $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ é tal que $f_1 \ge f_2 \ge \cdots \ge f_n \ge \cdots$ e $f_n \to 0$ uniformemente em X, prove que a série $\sum (-1)^n f_n$ converge uniformemente em X.

7. Se $\sum |f_n(x)|$ converge uniformemente em X, prove que $\sum f_n(x)$ também converge uniformemente em X.

Seção 2: Propriedades da convergência uniforme

1. Se $f_n \to f$ e $g_n \to g$ uniformemente no conjunto X, prove que $f_n + g_n \to f + g$ uniformemente em X. Prove ainda que se f e g forem limitadas então $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ uniformemente em X. Finalmente, se existir $c > 0$ tal que $|g(x)| \ge c$ para todo $x \in X$, prove que $1/g_n \to 1/g$ uniformemente em X.
2. Seja $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau ≥ 1. Mostre que a seqüência de funções $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = p(x) + 1/n$, converge uniformemente para p em $\mathbb{R}$ porém (f_n^2) não converge uniformemente para p^2.
3. Seja a seqüência de funções $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)/\sqrt{n}$. Prove que (f_n) converge uniformemente para 0 mas a seqüência das derivadas f_n' não converge em ponto algum do intervalo $[0,1]$.
4. Mostre que a seqüência de funções $g_n(x) = x + x^n/n$ converge uniformemente no intervalo $[0,1]$ para uma função derivável g e a seqüência das derivadas g_n' converge simplesmente em $[0,1]$ mas g' não é igual a $\lim g_n'$.
5. Seja $g\colon Y \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua. Se a seqüência de funções $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para f, com $f(X) \subset Y$ e $f_n(X) \subset Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, prove que $g \circ f_n \to g \circ f$ uniformemente em X. Analise também a questão mais simples $f_n \circ g \to f \circ g$.
6. Sejam X compacto, U aberto e $f\colon X \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(X) \subset U$. Se uma seqüência de funções $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para f, prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow f_n(X) \subset U$.
7. Se uma seqüência de funções contínuas $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente num conjunto denso $D \subset X$, prove que (f_n) converge uniformemente em X.
8. A seqüência de funções $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$, converge, porém não uniformemente. Mostre que, apesar disso, vale

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 f_n\right).$$

9. Dada uma seqüência de funções $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, suponha que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq c < 1$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Prove que $\sum |f_n(x)|$ e $\sum f_n(x)$ convergem uniformemente em X.
10. No exercício anterior, suponha que f_1 é limitada, que $f_n(x) \neq 0$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$ e, em vez de $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq c < 1$, suponha que $|f_{n+1}(x)/f_n(x)| \leq c < 1$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Obtenha a mesma conclusão.

Seção 3: Séries de potências

1. Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n(x-x_0)^n$. Prove que se $r \in \mathbb{R}^+$ então $r = 1/L$, onde L é o maior valor de aderência da seqüência limitada $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$. Assim temos, $r = 1/\left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right)$.
2. Se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$, prove que as séries de potências
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$$
têm ambas raio de convergência igual a $1/\sqrt{L}$.
3. Determine o raio de convergência de cada uma das séries seguintes:
$$\sum a^{n^2} x^n, \ \sum a^{\sqrt{n}} x^n \quad \text{e} \quad \sum n^{\frac{\log n}{n}} x^n.$$
4. Prove que a função $f \colon (-r, r) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, onde r é o raio de convergência desta série, é uma função par (respectivamente, ímpar) se, e somente se, $a_n = 0$ para todo n ímpar (respectivamente, par). (Ver Exercício 2.4, Cap. 8.)
5. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências cujos coeficientes são determinados pelas igualdades $a_0 = a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Mostre que o raio de convergência desta série é igual a $(-1+\sqrt{5})/2$.
6. Prove que a função
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$
está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e que $f'' + \dfrac{f'}{x} + f = 0$ para todo $x \neq 0$.