Capítulo 2

SEQÜÊNCIAS INFINITAS

Intervalos

Antes de entrarmos propriamente no assunto deste capítulo, vamos rever algumas definições sobre *intervalos numéricos*, que serão usadas neste e nos capítulos seguintes.

Dados dois números a e b, com $a < b$, chama-se *intervalo aberto* de extremos a e b, denotado por (a, b), ao conjunto

$$(a, b) = \{x \in R\colon a < x < b\}.$$

Se incluirmos os extremos a e b no intervalo, então ele será denominado *intervalo fechado* e indicado com o símbolo $[a, b]$:

$$[a, b] = \{x \in R\colon a \leq x \leq b\}.$$

O intervalo pode também ser *semifechado* ou *semi-aberto*, como nos exemplos seguintes:

$$[-3, 1) = \{x \in R\colon -3 \leq x < 1\}; \quad (3, 5] = \{x \in R\colon 3 < x \leq 5\}.$$

Introduzindo os símbolos $-\infty$ e $+\infty$, podemos considerar todo o eixo real como um intervalo:

$$(-\infty, +\infty) = \{x\colon -\infty < x < +\infty\}.$$

Adotamos notação análoga para semi-eixos fechados ou abertos na extremidade finita, como

$$[7, +\infty) = \{x\colon 7 \leq x < +\infty\}; \quad (-\infty, 3) = \{x\colon -\infty < x < 3\}.$$

Sempre que nos referirmos aos intervalos (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$ ou $[a, b)$, a e b serão números finitos, com $a < b$.

Seqüências infinitas

Uma *seqüência numérica* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ é uma função f, definida no conjunto dos números naturais $\mathbf{N}$: $f\colon n \mapsto f(n) = a_n$. O número n que aí aparece é chamado o *índice* e a_n o *n-ésimo* elemento da seqüência, ou *termo geral*. Um exemplo de seqüência é dado pela seqüência dos números pares positivos, $a_n = 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ A seqüência dos números ímpares positivos também tem uma fórmula simples para o termo geral, que é $a_n = 2n - 1$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$; ou $a_n = 2n + 1$, com $n \geq 0$.

Mas nem sempre o termo geral de uma seqüência é dado por uma fórmula, embora, evidentemente, sempre haja uma lei de formação bem definida que permite determinar o termo geral da seqüência. É esse o caso das aproximações decimais por falta de $\sqrt{2}$, que formam a seqüência infinita

$$a_1 = 1,4, \quad a_2 = 1,41, \quad a_3 = 1,414, \quad a_4 = 1,4142,$$

$$a_5 = 1,41421, \quad a_6 = 1,414213, \ldots$$

Outro exemplo é a seqüência dos números primos,

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41, \ldots;$$

Como é bem sabido, não existe fórmula para seu termo geral, mas todos os termos estão determinados.

A notação (a_n) é muito usada para designar uma seqüência. Também se escreve $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ ou simplesmente a_n. Alguns autores costumam escrever $\{a_n\}$ em vez de (a_n), mas preferimos reservar essa notação para o *conjunto de valores* da seqüência. Essa distinção é importante, pois uma seqüência possui infinitos elementos, mesmo que seu conjunto de valores seja finito. Por exemplo, a seqüência

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots$$

é infinita, com elemento genérico $a_n = -(-1)^n = (-1)^{n-1}$; mas seu conjunto de valores possui apenas dois elementos, $+1$ e -1, de forma que, segundo convencionamos,

$$\{a_n\} = \{-1,\ +1\}.$$

Pela definição, uma seqüência (a_n) é indexada a partir de $n = 1$, de forma que a_1 é seu primeiro termo. Mas, às vezes, é conveniente considerar seqüências indexadas a partir de um certo $n \neq 1$; é esse o caso da seqüência $a_n = \sqrt{n-6}$, que só faz sentido para $n = 6, 7, 8, \ldots$, de forma que a_6 é o primeiro termo dessa seqüência. Mas, mesmo nesses casos, com uma *translação de índices*, pode-se fazer com que a seqüência tenha primeiro índice $n = 1$. Assim, no exemplo que demos, é só definir $b_n = a_{n+5} = \sqrt{n-1}$ para que a seqüência fique definida a partir de $n = 1$.

Conceito de limite e primeiras propriedades

De interesse especial são as chamadas *seqüências convergentes*. Em termos sugestivos, uma seqüência (a_n) é convergente se, à medida que o índice n cresce, o elemento a_n vai- se tornando arbitrariamente próximo de um certo número L, chamado o *limite* da seqüência. A proximidade entre a_n e L é medida pelo valor absoluto da diferença entre esses dois números, isto é, por $|a_n - L|$. Portanto, dizer que a_n vai-se tornando arbitrariamente próximo de L significa dizer que $|a_n - L|$ torna-se inferior a qualquer número positivo ε, por pequeno que seja, desde que façamos o índice n suficientemente grande. Daí a definição precisa de convergência que damos a seguir.

2.1. Definição. *Diz-se que uma seqüência (a_n) converge para o número L, ou tem limite L se, dado qualquer número $\varepsilon > 0$, é sempre possível encontrar um número N tal que*

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Escreve-se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim a_n = L$ ou $a_n \to L$. Uma seqüência que não converge é dita *divergente*. Chama-se *seqüência nula* toda seqüência que converge para zero.

Essa definição requer várias observações. Ao dizermos "dado qualquer $\varepsilon > 0$", está implícito que ε pode ser arbitrariamente pequeno, ou seja, tão pequeno quanto quisermos. E a condição (2.1), uma vez satisfeita para um certo $\varepsilon = \varepsilon_0$, estará satisfeita com qualquer $\varepsilon > \varepsilon_0$; portanto, basta prová-la para todo ε positivo, menor do que um certo ε_0, como muitas vezes se faz, para que ela fique provada para qualquer $\varepsilon > 0$. Quanto ao número N, podemos supô-lo inteiro positivo, portanto, um índice da seqüência; pois se não for assim, é claro que ele pode ser substituido por qualquer inteiro maior. Mas fique claro também que N pode não precisa ser inteiro, como veremos nos exemplos adiante.

O primeiro sinal de desigualdade em (2.1) tanto pode ser $>$ como $\geq$, do mesmo modo que o segundo tanto pode ser $<$ como $\leq$. De fato, se existe um inteiro positivo N' tal que $n \geq N' \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$, então, é claro que (2.1) vale com $N = N' - 1$. E se é possível fazer $|a_n - L| \leq \varepsilon$ com qualquer $\varepsilon > 0$, certamente é possível fazer $|a_n - L| \leq \varepsilon/2$, portanto, $|a_n - L| < \varepsilon$.

Observe também que tanto faz fazer $|a_n - L| < \varepsilon$ ou $|a_n - L| < k\varepsilon$, onde k é uma constante positiva, pois se é possível fazer $|a_n - L| < k\varepsilon$ com qualquer $\varepsilon > 0$, certamente é possível fazer $|a_n - L| < k(\varepsilon/k) = \varepsilon$.

Se suprimirmos de uma seqüência (a_n) um número finito de seus termos, em particular, se eliminarmos seus k primeiros termos, isso em nada altera o caráter da seqüência com $n \to \infty$. Assim, se a seqüência original converge para L, ou diverge, a nova seqüência convergirá para L ou divergirá, respectivamente.

Definição de vizinhança

Dado um número L qualquer, chama-se *vizinhança* ε de L a todos os números x do intervalo $(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$. Denotaremos esse intervalo com o símbolo $V_\varepsilon(L)$. Observe que a condição $x \in V_\varepsilon(L)$ pode ser escrita das seguintes três maneiras equivalentes:

$$|x-L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x-L < \varepsilon \Leftrightarrow L-\varepsilon < x < L+\varepsilon.$$

Assim, ao definirmos limite, estamos dizendo que $n > N \Rightarrow a_n \in V_\varepsilon(L)$, ou seja,

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon, \quad \text{ou} \quad n > N \Rightarrow L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon,$$

ou ainda, $n > N \Rightarrow L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$.

É importante observar também, na definição de limite, que uma vez dado o número ε, esse número permanece fixo; a determinaçãoo de N depende do ε particular que se considere, de sorte que, mudando-se ε, deve-se, em geral, mudar também o número N. Em outras palavras, ε pode ser dado arbitrariamente, mas, uma vez prescrito, não pode ser mudado até a determinação de N. Isso está ilustrado no exemplo que consideramos a seguir.

2.2. Exemplo. Vamos provar, segundo a Definição 2.1, que a seqüência

$$(a_n) = \left(\frac{n}{n+12}\right) = \left(\frac{1}{13}, \frac{2}{14}, \frac{3}{15}, \ldots, \frac{n}{n+12}, \ldots\right)$$

converge para o número 1. Para isso observamos que, dado qualquer $\varepsilon > 0$,

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+12} - 1\right| = \frac{12}{n+12} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{12}{\varepsilon} - 12. \tag{2.2}$$

Isso quer dizer que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N $(= 12/\varepsilon - 12)$ tal que

$$n > N \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon,$$

que é precisamente a condição (2.1) exigida na definição de limite.

Esse exemplo mostra que quanto menor o ε tanto mais exigentes estaremos sendo quanto à proximidade entre a_n e o limite 1, exigência essa que se traduz em termos de fazer o índice n cada vez maior. De fato, quanto menor o ε, tanto maior o número $N = 12/\varepsilon - 12$. Assim, se $\varepsilon = 1/10, N = 108$; se $\varepsilon = 1/100, N = 1188$; em geral, se $\varepsilon = 10^{-k}, N = 12 \cdot 10^k - 12$. Isso ilustra o que dissemos antes: a determinação do número N depende do número ε

particular que se considere. Ao contrário, se dermos um ε muito grande, pode até acontecer que não haja qualquer condição no índice n; é o que acontece com $\varepsilon = 2$ no exemplo que estamos considerando, que resulta em $N = -6$.

O raciocínio usado em (2.2) permite escrever:

$$|a_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{12}{\varepsilon} - 12.$$

No entanto, poderíamos também ter racionado assim:

$$|a_n - 1| = \frac{12}{n+12} < \frac{12}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{12}{\varepsilon}. \tag{2.3}$$

Mas então a equivalência indicada é apenas entre as duas últimas desigualdades, não sendo mais verdade que

$$|a_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{12}{\varepsilon}.$$

O correto agora é a implicação (numa só direção)

$$n > \frac{12}{\varepsilon} \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon,$$

que também é suficiente para a comprovação de que 1 é o limite. Perdemos a implicação contrária por causa da primeira desigualdade em (2.3), em consequência do que $12/(n+12) < \varepsilon$ não implica $n > 12/\varepsilon$; pode agora ocorrer $12/(n+12) < \varepsilon$ com $n < 12/\varepsilon$, desde que seja $n > 12/\varepsilon - 12$. Veja: com $\varepsilon = 1/10$, $12/\varepsilon = 120$ e $12/\varepsilon - 12 = 108$.

2.3. Exemplo. Consideremos a seqüência

$$a_n = \frac{3n}{n + \operatorname{sen} 2n}.$$

É fácil ver que seu limite deve ser 3. Para evidenciar isso dividimos o numerador e o denominador por n e notamos que $(\operatorname{sen} 2n)/n \to 0$. Assim,

$$a_n = \frac{3}{1 + (\operatorname{sen} 2n)/n}.$$

O que fizemos foi descobrir o limite; devemos agora demonstrar que 3 é realmente o limite, usando a Definição 2.1. Começamos observando que

$$|a_n - 3| = \frac{3|\operatorname{sen} 2n|}{|n + \operatorname{sen} 2n|} \le \frac{3}{|n + \operatorname{sen} 2n|} \le \frac{3}{n - |\operatorname{sen} 2n|} \le \frac{3}{n-1}, \tag{2.4}$$

as duas últimas desigualdades havendo sido obtidas graças às desigualdades $|n + \operatorname{sen} 2n| \geq n - |\operatorname{sen} 2n| \geq n - 1$. Fazendo agora intervir o número ε, obtemos uma desigualdade fácil de resolver em n:

$$|a_n - 3| \leq \frac{3}{n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1 + \frac{3}{\varepsilon} \tag{2.5}$$

de sorte que

$$n > 1 + 3/\varepsilon \Rightarrow |a_n - 3| < \varepsilon, \tag{2.6}$$

que estabelece o limite desejado.

O leitor deve notar, nas passagens efetuadas em (2.4), que procuramos chegar a uma expressão simples, como $1/(n-1)$, para depois fazer intervir o ε, obtendo então uma desigualdade fácil de resolver, como em (2.4). Não fizéssemos tais simplificações e teríamos de enfrentar a intratável inequação

$$\frac{3|\operatorname{sen} 2n|}{|n + \operatorname{sen} 2n|} < \varepsilon .$$

É claro que as transformações feitas só permitem, em (2.6), a implicação no sentido aí indicado, que é suficiente para nossos propósitos.

2.4. Exemplo. É fácil descobrir o limite do quociente de dois polinômios de mesmo grau, dividindo numerador e denominador pela maior potência de n. Assim,

$$a_n = \frac{3n^2 + 4n}{n^2 + n - 4} = \frac{3 + 4/n}{1 + 1/n - 4/n^2}$$

claramente tende a 3, já que $4/n, 1/n$ e $4/n^2$ tendem a zero. Para provar isso diretamente da definição de limite, notamos que, a partir de $n = 2$ (que implica $n^2 + n - 4 > 0$),

$$|a_n - 3| = \frac{n + 12}{n^2 + n - 4} < \frac{n + 12}{n^2 - 4};$$

e a partir de $n = 12, n + 12 \leq 2n$ e $4 < n^2/2$, de sorte que $n^2 - 4 > n^2 - n^2/2 = n^2/2$. Assim,

$$|a_n - 3| < \frac{2n}{n^2/2} = \frac{4}{n} < \varepsilon,$$

desde que n seja maior que o maior dos números, $4/\varepsilon$ e 12, isto é,

$$n > N = \max\{4/\varepsilon, 12\}.$$

Isso conclui a demonstração.

Este último exemplo mostra, em particular, que, com n tendendo a infinito, os termos com maior expoente no numerador e no denominador são dominantes sobre os demais.

Seqüências limitadas

O cálculo de limites pode tornar-se mais e mais complicado, se insistirmos em fazê-lo diretamente da definição de limite. Felizmente, com essa definição podemos estabelecer as propriedades tratadas logo adiante, no Teorema 2.8, as quais permitem simplificar bastante o cálculo de limites. Demonstraremos primeiro dois teoremas de importância fundamental, o primeiro dos quais envolvendo a noção de "seqüência limitada". Diz-se que uma seqüência (a_n) é *limitada à esquerda*, ou *limitada inferiormente*, se existe um número A tal que $A \leq a_n$ para todo n; e *limitada à direita*, ou *limitada superiormente*, se existe um número B tal que $a_n \leq B$ para todo n. Quando a seqüência é limitada à esquerda e à direita ao mesmo tempo, dizemos simplesmente que ela é *limitada*. Como é fácil ver, isso equivale a afirmar que existe um número M tal que $|a_n| \leq M$ para todo n.

2.5. Teorema. *Toda seqüência convergente é limitada.*

Demonstração. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um índice N tal que

$$n > N \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon,$$

Isto nos diz que, a partir do índice $n = N + 1$, a seqüência é limitada: à direita por $L + \varepsilon$ e à esquerda por $L - \varepsilon$. Para englobarmos a seqüência inteira, basta considerar, dentre todos os números

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_N,\ L - \varepsilon,\ L + \varepsilon,$$

aquele que é o menor de todos, digamos, A, e aquele que é o maior de todos, digamos, B; então será verdade, para todo n, que

$$A \leq a_n \leq B,$$

o que completa a demonstração.

Podíamos também ter atalhado um pouco, como é costume, procedendo assim: seja

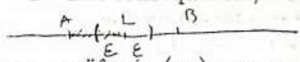
$$M = \max\{|a_1|,\ |a_2|, \ldots,\ |a_N|,\ |L - \varepsilon|,\ |L + \varepsilon|\}.$$

Então $|a_n| \leq M$ para todo n, o que prova que a seqüência é limitada.

Conservação do sinal

2.6. Teorema. *Se uma seqüência (a_n) converge para um limite L, e se $A < L < B$, então, a partir de um certo índice N, $A < a_n < B$.*

Demonstração. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que, a partir desse índice, $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$. Portanto, é apenas uma questão de prescrever, de início, ε menor que o menor dos números $L-A$ e $B-L$, para termos $L-\varepsilon > L-(L-A) = A$ e $L+\varepsilon < L+(B-L) = B$. Em conseqüência, $n > N \Rightarrow A < a_n < B$, como queríamos demonstrar.



Corolário 2.7. *Se uma seqüência (a_n) converge para um limite $L \neq 0$, então, a partir de certo índice N, $|a_n| > |L|/2$.*

Para a demonstração, se $L > 0$, tome $A = L/2$. Se $L < 0$, tome $B = L/2$.

O teorema anterior e seu corolário são muito úteis nas aplicações e serão usados repetidamente em nosso estudo, como o leitor deverá notar. Observe que, sempre que tivermos uma seqüência com limite diferente de zero, poderemos encontrar números A e B de mesmo sinal nas condições do teorema. Em geral, nas aplicações, utilizamos apenas uma das desigualdades, ou $A < a_n$ ou $a_n < B$.

Operações com limites

2.8. Teorema. *Sejam (a_n) e (b_n) duas seqüências convergentes, com limites a e b respectivamente. Então, $(a_n + b_n)$, $(a_n b_n)$ e (ka_n), onde k uma constante qualquer, são seqüências convergentes, além do que,*

a) $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$;

b) $\lim(ka_n) = k(\lim a_n) = ka$; *em particular,* $k = -1$ *nos dá* $a_n \to a \Rightarrow -a_n \to -a$;

c) $\lim(a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n) = ab$;

d) se, além das hipóteses acima, $b \neq 0$, então existe o limite de a_n/b_n, igual a a/b.

Demonstração. Demonstraremos os dois últimos itens, deixando os dois primeiros, que são mais fáceis, para os exercícios.

Para demonstrar a terceira propriedade, utilizamos a desigualdade do triângulo e o fato de que a seqüência b_n é limitada por uma constante positiva M, de sorte que podemos escrever:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \\ &\leq M|a_n - a| + |a||b_n - b|. \end{aligned}$$

Ora, tanto $|a_n - a|$ como $|b_n - b|$ podem ser feitos arbitrariamente pequenos, desde que n seja suficientemente grande. Assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos fazer

$|a_n - a|$ menor do que $\varepsilon/2M$ a partir de um certo índice N_1 e $|b_n - b| < \varepsilon/2|a|$ a partir de um certo N_2; então, sendo N o maior desses índices, $n > N$ satisfará $n > N_1$ e $n > N_2$ simultaneamente; logo,

$$n > N \Rightarrow |a_n b_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

como queríamos demonstrar.

Observe, nesse raciocínio, que se nos contentássemos em fazer $|a_n - a|$ e $|b_n - b|$ menores do que ε, em vez de $|a_n - a| < \varepsilon/2M$ e $|b_n - b| < \varepsilon/2|a|$, o resultado final seria

$$n > N \Rightarrow |a_n b_n - ab| < (M + |a|)\varepsilon = k\varepsilon$$

Esse procedimento é tão satisfatório quanto o anterior, como já tivemos oportunidade de observar; se quiséssemos terminar com ε, bastaria começar com o número ε/k em vez de ε.

Para a demonstração da quarta propriedade, observamos que o quociente a_n/b_n pode ser interpretado como o produto $a_n(1/b_n)$, de forma que, em vista da propriedade já demonstrada, basta provar que $1/b_n \to 1/b$. Temos:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|}$$

Como $b \neq 0$, a partir de um certo N_1, $|b_n| > |b|/2$; e, dado $\varepsilon > 0$, a partir de um certo N_2, $|b_n - b|$ pode ser feito menor do que $|b|^2\varepsilon/2$, de sorte que, sendo $N = \max\{N_1, N_2\}$, teremos:

$$n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{|b|^2\varepsilon/2}{|b|^2/2} = \varepsilon$$

e isso completa a demonstração.

Em vista deste último teorema, fica fácil lidar com certos limites, como vemos pelo exemplo seguinte:

$$\begin{aligned}\lim \frac{3n^2 + 4n}{5n^2 - 7} &= \lim \frac{3 + 4/n}{5 - 7/n^2} = \frac{\lim(3 + 4/n)}{\lim(5 - 7/n^2)} \\ &= \frac{\lim 3 + \lim(4/n)}{\lim 5 - \lim(7/n^2)} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Terminamos esta seção com dois exemplos importantes de limites.

2.9. Exemplo. Dado um número $a > 0$, $\sqrt[n]{a} \to 1$. Isso é evidente se $a = 1$, quando a seqüência é constantemente igual a 1. Suponhamos $a > 1$, logo, $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$, onde h_n é um número positivo conveniente. Utilizando a desigualdade de Bernoulli, teremos:

$$\boxed{a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n} > nh_n.$$

$a > nh_n$

$h_n < \frac{a}{n}$

Assim, $h_n = |\sqrt[n]{a} - 1| < a/n$ e isso será menor do que qualquer $\varepsilon > 0$ fixado de antemão, desde que $n > a/\varepsilon$.

No caso $0 < a < 1$, temos que $1/a > 1$, donde $1/\sqrt[n]{a} \to 1$. Então, pelo item d) do Teorema 2.8, concluímos que $\sqrt[n]{a} \to 1$.

2.10. Exemplo. $\sqrt[n]{n} \to 1$. Ainda aqui temos que $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, onde h_n novamente é um número positivo conveniente. Mas agora a desigualdade de Bernoulli é insuficiente para nossos propósitos, pois, com ela,

$$n = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n > nh_n, \text{ donde } h_n < 1,$$

e essa desigualdade não basta para provar que h_n tende a zero.

Apelamos para a fórmula do binômio, que permite escrever, já que $h_n > 0$:

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \ldots + h_n^n > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

donde $h_n^2 < 2/(n-1)$. Agora sim, dado $\varepsilon > 0$, $2/(n-1)$ será menor do que ε^2, desde que n seja maior do que $2/\varepsilon^2 + 1 = N$. Conseqüentemente,

$$n > N \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| = h_n < \varepsilon,$$

provando o resultado desejado.

Exercícios

1. Escreva os cinco primeiros termos de cada uma das seguintes seqüências:

$$\text{a) } a_n = \frac{n}{n+1}; \quad \text{b) } a_n = 3 + 2(-1)^n; \quad \text{c) } a_n = \frac{n}{n^2+1}; \quad \text{d) } a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}.$$

2. Em cada um dos casos seguintes, são dados os primeiros termos de uma seqüência. Supondo que persista a tendência observada em cada caso, escreva a forma geral de cada uma das seqüências.

a) $1/2,\ 2/3,\ 3/4,\ 4/5, \ldots$; ; b) $1,\ -1/2,\ 1/3,\ -1/4 \ldots$;

c) $1,\ 1/4,\ 1/9,\ 1/16, \ldots$; d) $1,\ -1/2,\ 1/6,\ -1/24,\ 1/120, \ldots$

3. Use a Definição 2.1 para provar que

$$\text{a) } \lim \frac{n}{n^2+1} = 0; \quad \text{b) } \lim \frac{2n^2}{n^2+7} = 2; \quad \text{c) } \lim \frac{3n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+5} = 3.$$

4. Descubra o limite de cada uma das seqüências seguintes e, em seguida, demonstre que o suposto limite satisfaz a Definição 2.1.

$$\text{a) } a_n = \frac{n \cos\sqrt{n^2+7}}{n^2+1}; \quad \text{b) } a_n = \frac{\sqrt{n}(1+8\sqrt{n})}{4n-1}; \quad \text{c) } a_n = \frac{n^3-1}{2n^3-n}.$$

5. (Unicidade do limite) Prove que uma seqüência só pode convergir para um único limite.

6. Prove que se a_n tem limite L, então $|a_n|$ tem limite $|L|$. Dê exemplo de uma seqüência (a_n) tal que $|a_n|$ converge, mas não a_n.

7. Sejam (a_n) e (b_n) duas seqüências tais que $|a_n - a| < C|b_n|$, onde a é um certo número real e C uma constante positiva. Usando a definição de limite, mostre que se $b_n \to 0$ então $a_n \to a$.

8. Prove que se (a_n) é uma seqüência que converge para zero e (b_n) uma seqüência limitada, não necessariamente convergente, então $(a_n b_n)$ converge para zero.

9. Prove que a seqüência $a_n = \sqrt{n+h} - \sqrt{n}$ tende a zero.

10. Faça o mesmo para a seqüência $a_n = a^n$, onde $0 < a < 1$.

11. Supondo que $a_n \geq 0$ para todo n e $a_n \to 0$, prove que $\sqrt{a_n} \to 0$.

12. Supondo que $a_n \to x > 0$, prove que $a_n > 0$ a partir de um certo N.

13. Prove os ítens a) e b) do Teorema 2.8. Generalize a propriedade da soma, provando que o limite de uma soma qualquer de seqüências convergentes é a soma dos limites. Generalize também a propriedade do produto para o caso de vários fatores.

14. Prove que se (a_n) é uma seqüência convergente, com $a_n \leq b$, então $\lim a_n \leq b$. Mostre com contra-exemplo que, mesmo que seja $a_n < b$, não é verdade, em geral, que $\lim a_n < b$. Enuncie e demonstre propriedade análoga no caso $a_n > b$.

15. Sejam (a_n) e (b_n) seqüências convergentes, com $a_n \leq b_n$. Prove que $\lim a_n \leq \lim b_n$. Mostre por meio de contra-exemplo que também aqui pode ocorrer a igualdade dos limites mesmo que seja $a_n < b_n$. [Observe que o exercício anterior é um caso particular deste, com seqüência $(b_n) = (b,\ b,\ \ldots)$.]

16. **(Critério de confronto ou Teorema da seqüência intercalada.)** Sejam (a_n), (b_n) e (c_n) três seqüências tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$, (a_n) e (c_n) convergindo para o mesmo limite L. Demonstre que (b_n) também converge para L.

17. Prove que $\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} \to 1$.

18. A negação da Definição 2.1 é "a_n não converge para L". Mas como escrever essa negatição em termos de ε e N?

Sugestões e soluções

2. a) $n/(n+1)$, $n \geq 1$; b) $(-1)^{n+1}/n$, $n \geq 1$, ou $(-1)^n/(n+1), n \geq 0$;

c) $1/n^2$, $n \geq 1$; d) $-(-1)^n/n!$, $n \geq 1$.

3. a) $|a_n| < \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$; b) $|a_n - 2| = \dfrac{14}{n^2+7} < \dfrac{14}{n^2}$; c) $|a_n - 3| = \dfrac{15}{n\sqrt{n}+5} < \dfrac{15}{n\sqrt{n}}$.

4. b) $|a_n - 2| = \dfrac{\sqrt{n}+2}{4n-1} \leq \dfrac{\sqrt{n}+2\sqrt{n}}{4n-n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

5. Suponha existirem dois limites distintos, L e L' e tome $\varepsilon < |L - L'|/2$. Então, $|a_n - L| < \varepsilon$ a partir de um certo N_1 e $|a_n - L'| < \varepsilon$ a partir de um certo N_2. Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$, de forma que $n > N$ acarreta simultaneamente $n > N_1$ e $n > N_2$. Assim, $n > N$ acarreta $|L - L'| = |(L - a_n) + (a_n - L')| \leq |a_n - L| + |a_n - L'| < 2\varepsilon < |L - L'|$, o que é absurdo.

9. Multiplique numerador e denominador pela soma das raizes que aparecem na definição da seqüência.

10. Como $b = 1/a > 1$, $b = 1 + c$, com $c > 0$. Então,

$$b^n = \frac{1}{a^n} = (1+c)^n > 1 + nc > nc; \quad \text{logo, } a^n < \frac{1}{nc}.$$

Outro modo, utilizando o logaritmo, baseia-se no seguinte:

$$a^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \log a < \log \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\log \varepsilon}{\log a}.$$

Nessa última passagem, ao dividir a desigualdade por $\log a$, levamos em conta que esse número é negativo, daí a mudança de sinal da desigualdade.

11. Deseja-se provar que $\sqrt{a_n} < \varepsilon$ a partir de um certo N. Observe que isto equivale a $a_n < \varepsilon^2$.

12. Use o Teorema 2.6.

13. $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$.

17. Use o critério de confronto, notando que $1 \leq \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{n}$.

18. "Existe um $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja o número natural N, existe um índice $n > N$ tal que $|a_n - L| > \varepsilon$". Isto é o mesmo que: "Existe um $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja o número natural N, existe uma infinidade de índices $n > N$ tais que $|a_n - L| > \varepsilon$".

Seqüências monótonas

Há pouco vimos que toda seqüência convergente é limitada. Mas nem toda seqüência limitada é convergente, como podemos ver através de exemplos simples como os seguintes:

1) $a_n = (-1)^n$ assume alternadamente os valores $+1$ e -1, portanto, não converge para nenhum desses valores;

2) $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$ é um exemplo parecido com o anterior, mas agora a seqüência assume uma infinidade de valores, formando um conjunto de pontos que se acumulam em torno de -1 e $+1$. Mas a seqüência não converge para nenhum desses valores. Se ela fosse simplesmente $1 + 1/n$, então convergiria para o número 1.

Veremos, entretanto, que há uma classe importante de seqüências limitadas — as chamadas seqüências "monótonas" — que são convergentes.

2.11. Definições. *Diz-se que uma seqüência* (a_n) *é* crescente *se* $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ *e* decrescente *se* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$ *Diz-se que a seqüência é* não decrescente *se* $a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_n \leq \ldots$ *e* não crescente *se*

$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ *Diz-se que a seqüência é* monótona *se ela satisfaz qualquer uma dessas condições.*

As seqüências monótonas limitadas são convergentes, como veremos logo a seguir. Esse é o primeiro resultado que vamos estabelecer, em cuja demonstração utilizamos a propriedade do supremo. Aliás, foi a necessidade de fazer tal demonstração para "funções monótonas" (Veja o Teorema 4.14, p. 114) a principal motivação que teve Dedekind em sua construção dos números reais.

2.12. Teorema. *Toda seqüência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Consideremos, para fixar as idéias, uma seqüência não decrescente (a_n) (portanto, limitada inferiormente pelo elemento a_1). A hipótese de ser limitada significa que ela é *limitada superiormente*; logo, seu conjunto de valores possui supremo S. Vamos provar que esse número S é o limite de a_n.

Dado $\varepsilon > 0$, existe um elemento da seqüência, com um certo índice N, tal que $S - \varepsilon < a_N \leq S$. Ora, como a eqüência é não decrescente, $a_N \leq a_n$ para todo $n > N$, de sorte que

$$n > N \Rightarrow S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon,$$

que é o que desejávamos demonstrar.

A demonstração do teorema no caso de uma seqüência não crescente é análoga e fica para os exercícios.

O número e

O número e, base dos logaritmos naturais, aparentemente surgiu na Matemática pela consideração de um problema de juros compostos instantaneamente (veja nosso livro de Cálculo 1). Nesse contexto ele é definido mediante o limite

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Trata-se, evidentemente, de uma forma indeterminada do tipo 1^∞, pois enquanto o expoente tende a infinito, a base $1 + 1/n$ tende decrescentemente a 1.

Vamos provar que a seqüência que define e é crescente e limitada, portanto, tem limite. Pela fórmula do binômio de Newton,

Provar que $a_{n+1} > a$

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\ &+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Uma expressão para a_{n+1}, como esta última, conterá um termo a mais no final, além dos que aí aparecem, com $n+1$ em lugar de n, exceto em n! Mesmo sem levar em conta o termo a mais, pode-se ver que cada um dos termos de (2.7) é inferior a cada um dos correspondentes com $n+1$ em lugar de n. Isso prova que $a_n < a_{n+1}$, isto é, a seqüência (a_n) é crescente. Para provarmos que ela é limitada, basta observar que cada parênteses que aparece em (2.7) é menor do que 1, de sorte que

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}} < 3. \tag{2.8}$$

Sendo crescente e limitada, (a_n) tem limite, que é o número e. Fica claro também que esse número está compreendido entre 2 e 3.

Da expressão (2.7) para a_m decorre que, sendo $m > n$, só até o termo n

$$a_m > 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right).$$

Mantendo fixo o número n, fazemos $m \to \infty$, o que nos dá: $e \geq 2 + 1/2! + \ldots + 1/n!$. Daqui e de (2.8) obtemos, finalmente, com $n \to \infty$,

$$\boxed{e = \lim\left(2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right).} \tag{2.9}$$

Mostremos também que $\lim\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$. Para isso, notamos que, sendo $m = n - 1$,

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n/(n-1)} = \frac{1}{(m+1)/m} = \frac{1}{1 + 1/m};$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\left(1 + \frac{1}{m}\right) \to e.$$

Em vista disso podemos escrever:

$$e = \lim_{n \to \pm\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Subseqüências

Quando eliminamos um ou vários termos de uma dada seqüência, obtemos o que se chama uma "subseqüência" da primeira. Assim, a seqüência dos números pares positivos é uma subseqüência da seqüência dos números naturais. O

$(x+a)^5 = \binom{5}{0} x^5 a^0 \ldots$

mesmo é verdade da seqüência dos números ímpares positivos; da seqüência dos números primos; ou da seqüência 1, 3, 20, 37, 42, 47, ..., isto é,

$$a_1 = 1,\ a_2 = 13,\ a_3 = 20,\ a_n = 5n + 17 \text{ para } n \geq 4.$$

Uma definição precisa desse conceito é dada a seguir.

2.13. Definição. *Uma subseqüência de uma dada seqüência* (a_n) *é uma restrição dessa seqüência a um subconjunto infinito* N' *do conjunto* N *dos números naturais.* Dito de outra maneira, *uma subseqüência de* (a_n) *é uma seqüência* do tipo $(b_j) = (a_{n_j})$, *onde* (n_j) *é uma seqüência crescente de inteiros positivos, isto é,* $n_1 < n_2 < \ldots$

Como conseqüência dessa definição, $1 \leq n_1$, $2 \leq n_2, \ldots$, e, em geral, $\boxed{j \leq n_j}$. Mas, como $j < n_j$ para algum j (a não ser que a subseqüência seja a própria seqüência dada), esta desigualdade permanecerá válida para todos os índices subseqüentes ao primeiro índice para o qual ela ocorrer.

A seqüência $(a_n) = (-1)^n(1 + 1/n)$ tem subseqüências (a_{2n}), (a_{4n}), (a_{6n}) etc., todas convergindo para 1; e subseqüências (a_{2n-1}), (a_{4n-1}), (a_{6n-1}) etc., todas convergindo para -1. Mas tem também subseqüências divergentes, como $(a_{n^2}) = (a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots) = (-2, 5/4, -10/9, 17/16,)$.

2.14. Teorema. *Se uma seqüência* (a_n) *converge para um limite* L, *então toda sua subseqüência* (a_{n_j}) *também converge para* L.

Demonstração. De $a_n \to L$ segue-se que, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe N tal que $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Como vimos acima, $n_j \geq j$, de forma que $j > N \Rightarrow (n_j > N \Rightarrow |a_{n_j} - L| < \varepsilon)$, o que completa a demonstração.

Limites infinitos

Certas seqüências, embora não convergentes, apresentam regularidade de comportamento, o termo geral tornando-se ou arbitrariamente grande ou arbitrariamente pequeno com o crescer do índice. Diz-se então que a seqüência *diverge* para $+\infty$ ou para $-\infty$ respectivamente. Damos a seguir as definições precisas desses conceitos.

2.15. Definições. *Diz-se que a seqüência* (a_n) *diverge (ou tende) para* $+\infty$ *e escreve-se* $\lim a_n = +\infty$ *ou* $\lim a_n = \infty$ *se, dado qualquer número positivo* k, *existe* N *tal que* $n > N \Rightarrow a_n > k$. *Analogamente,* (a_n) *diverge (ou tende) para* $-\infty$ *se, dado qualquer número negativo* k, *existe* N *tal que* $n > N \Rightarrow a_n < k$; *neste caso, escreve-se* $\lim a_n = -\infty$.

Por exemplo, é fácil verificar, á luz dessas definições, que as seqüências $a_n = n, a_n = n^2 + 1$ e $a_n = \sqrt{n}$ tendem, todas elas, a $+\infty$, enquanto que $a_n = -n$, $a_n = 3 - n^2$ e $a_n = 6 - \sqrt{n}$ tendem a $-\infty$.