Lista de Exercícios de Fundamentos de Análise

24/04/2018

1. Dado $a \neq 0$ um elemento do corpo ordenado $\mathbb{K}$. Definimos: $a^1 \doteq a$, $a^{m+1} \doteq a^m a$, e $a^{-n} \doteq (a^n)^{-1}$, para $n \in \mathbb{N}$. Mostre que para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ vale
   (a) $a^m a^n = a^{m+n}$;
   (b) $(a^m)^n = a^{mn}$.

2. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado, $a, b \in \mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que:
   (a) $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$;
   (b) $a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0$;
   (c) Se a e b são positivos então $a < b \Leftrightarrow a^{-1} > b^{-1}$;
   (d) Se $a \geq -1$ então $(1+a)^n \geq 1 + na$;
   (e) Se $a \neq 0$ então $(1+a)^{2n} > 1 + 2na$;
   (f) Se $a, b \geqslant 0$ então $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.
   (g) Se $a > 0$ e $a + b > 0$ então $(a+b)^n \geqslant a^n + na^{n-1}b$

3. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Mostre que
$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \leqslant \frac{a+c}{b+d} \leqslant \frac{c}{d}.$$

4. Se $A \subset B$ mostre que $\inf B \leqslant \inf A \leqslant \sup A \leqslant \sup B$.

5. Sejam A e B conjuntos não vazios e limitados de números reais tais que $a \leqslant b$, para todo $a \in A$ e $b \in B$. Mostre que:
   (a) $\sup A \leqslant \inf B$;
   (b) $\sup A = \inf B \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)(\exists b \in B)\ b - a < \varepsilon$.

6. Seja $A \subset \mathbb{R}$ não vazio e $c \in \mathbb{R}$. Definimos $-A \doteq \{-a; a \in A\}$ e $cA \doteq \{ca; a \in A\}$.
   (a) Se A é limitado inferiormente prove que que $-A$ é limitado superiormente e $\sup(-A) = -\inf A$;
   (b) Se A é limitado (superiormente e inferiormente) e $c > 0$ então $\sup(cA) = c \sup A$ e $\inf(cA) = c \inf A$;
   (c) Enuncie e prove um resultado análogo ao anterior para $c < 0$.

7. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ não vazios e defina $A + B \doteq \{a + b; a \in A \ \text{ e } b \in B\}$. Mostre que:
   (a) $A + B$ é limitado;
   (b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
   (c) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

8. Seja $A \subset \mathbb{R}$ não vazio. Dizemos que a função $f : A \to \mathbb{R}$ é limitada quado o conjunto imagem $f(A) = \{f(a); a \in A\}$ é limitado. Neste caso definimos

$$\sup_A f = \sup f(A) \quad \text{e} \quad \inf_A f = \inf f(A).$$

Dadas duas funções limitadas $f, g : A \to \mathbb{R}$, mostre que:

(a) $f + g$ é limitada;
(b) $(f + g)(A) \subset f(A) + g(A)$;
(c) $\sup_A(f + g) \leqslant \sup_A f + \sup_A g$;
(d) $\inf_A(f + g) \geqslant \inf_A f + \inf_A g$;
(e) Dê exemplos em que as desigualdades acima ocorrem estritamente e exemplos em que ocorre a igualdade.

9. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}_+$ não vazios e defina $AB \doteq \{ab; a \in A \ \text{ e } b \in B\}$. Mostre que:

(a) AB é limitado;
(b) $\sup(AB) = \sup A \sup B$
(c) $\inf(AB) = \inf A \inf B$.

10. Dadas duas funções limitadas $f, g : A \to \mathbb{R}_+$, mostre que:

(a) fg é limitada;
(b) $(fg)(A) \subset f(A)g(A)$;
(c) $\sup_A(fg) \leqslant \sup_A f \sup_A g$;
(d) $\inf_A(fg) \geqslant \inf_A f \inf_A g$;
(e) Dê exemplos em que as desigualdades acima ocorrem estritamente e exemplos em que ocorre a igualdade.

Observação: fg é o produto usual de funções, ou seja $(fg)(x) = f(x)g(x)$, enquanto que $(fg)(A) = \{(fg)(a); a \in A\}$ é a imagem direta do conjunto A pela função fg.