1ª Prova de Fundamentos de Análise

05/04/2018

◇ Essa prova é composta de duas partes:

1. Entregue 4 questões resolvidas até às 21h.
   Faça uma questão de cada assunto e a quarta do assunto que preferir.
2. Enviar a resolução de todas as questões até às 24h de domingo, 8 de abril,
   para o endereço: fundamentos.analise.ufpr@gmail.com

◇ As notas serão divulgadas no endereço: www.ufpr.br/∼akirilov.

Números Naturais e Inteiros

1. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Usando apenas os axiomas de Peano e as definições de adição e multiplicação de números naturais mostre que:
   (a) se $a \cdot b = 1$, prove que $a = 1$ e $b = 1$;
   (b) se $a + b = 1$, prove que $a = 1$ ou $b = 1$.

2. Usando apenas sua resultados vistos em nossas aulas:
   (a) defina a relação $\leqslant$ em $\mathbb{N}$;
   (b) prove que, para $a, b, c \in \mathbb{N}$, com $c \neq 0$, vale $a \leqslant b \Leftrightarrow a \cdot c \leqslant b \cdot c$.

3. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, tais que $a > b > 0$,
   (a) mostre que existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $b \cdot t > a$;
   (b) mostre que existem $q, r \in \mathbb{N}$, tais que $a = b \cdot q + r$ e $0 \leq r < b$.

Números Racionais e Irracionais

4. Usando apenas os teoremas que caracterizam a representação decimal de um número racional, justifique porque as expressões estão incorretas:
   (a) $\frac{51}{85} = 0,6001001\ldots$
   (b) $\frac{6}{33} = 11,81$
   (c) $\frac{311}{7} = 44,42857139\;42857139\;42857139\ldots$

   Obs.: Fazer as contas e dizer qual é o resultado correto de uma expressão não serve como resposta para este exercício.

5. Faça o que se pede:
   (a) Defina número irracional e use sua definição para construir um número irracional α tal que $3.1415921 < \alpha < 3.1415922$.

(b) Sejam r um número racional e α um número irracional, verifique se são racionais ou irracionais os seguintes números: $\dfrac{r+\alpha}{2}$, α^2 e $\sqrt[3]{\alpha}$.

6. Seja a/b a forma irredutível de um número racional.

   (a) Se a representação decimal de a/b possui uma quantidade finita de casas decimais, mostre que na decomposição de b em fatores primos aparecem apenas os fatores 2 e 5.

   (b) Prove que a recíproca do item anterior também é verdadeira.

Conjuntos finitos e enumeráveis

7. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto qualquer, prove que as três afirmações abaixo são equivalentes:

   (a) X é finito;

   (b) X é limitado;

   (c) X possui elemento máximo.

8. Faça o que se pede:

   (a) Defina conjunto enumerável;

   (b) Usando apenas sua definição prove que o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável;

   (c) Dê uma segunda demonstração que $\mathbb{Z}$ é enumerável apresentando uma função sobrejetiva (que não seja injetiva) e usando um teorema visto em aula.

9. Sejam X e Y dois conjuntos infinitos enumeráveis.

   (a) Mostre que o produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável;

   (b) Use o item anterior para provar que o conjunto dos números racionais é enumerável.

Desafio – Pontuação Extra

10. Construa uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para cada y no contradomínio, a imagem inversa $f^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{N} : f(x) = y\}$ seja um conjunto infinito enumerável.