2ª Prova de Fundamentos de Análise

10/05/2018

◇ Essa prova é composta de duas partes:

1. Entregue 4 questões resolvidas até às 21h (sendo duas questões de cada assunto).
2. Enviar a resolução (escaneada/fotografada) de todas as questões até às 24h de 13/05 (domingo), para o endereço: fundamentos.analise.ufpr@gmail.com

◇ As notas serão divulgadas no endereço: www.ufpr.br/∼akirilov.

Corpos Ordenados - Supremo e Ínfimo

1. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, mostre que:
   (a) Se a e b são positivos então $a < b \Leftrightarrow a^{-1} > b^{-1}$;
   (b) Se $a \geq -1$ então $(1+a)^n \geq 1 + na$.

2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que:
   (a) $\forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon \Rightarrow a = b$;
   (b) $\big|\, |a| - |b| \,\big| \leqslant |a - b|$.

3. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ dois conjuntos limitados. Mostre que:
   (a) Se $A \subset B$ então $\sup A \leqslant \sup B$;
   (b) Se $c < 0$ então $\sup(cA) = c \inf A$.

4. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções limitadas, mostre que:
   (a) $\sup(f + g) \leqslant \sup(f) + \sup(g)$;
   (b) $\inf(f + g) \geqslant \inf(f) + \inf(g)$;
   (c) Dê um exemplo em que as desigualdades acima ocorrem estritamente e um exemplo em que ocorre a igualdade.

   Obs.: $\sup(f) = \sup\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$ e $\inf(f) = \inf\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$.

Sequências Numéricas

5. Usando apenas a definição de sequência convergente (com ε e n_0) prove que:
   (a) $\lim \dfrac{2n^2}{5 - 4n^2} = -\dfrac{1}{2}$;
   (b) se $\lim x_n = L$ então $\lim x_n^2 = L^2$.

6. Suponha que $\lim x_n = \pi$.

   (a) Mostre que apenas um número finito de termos desta sequência pode ser menor que 3,14.

   (b) Prove que $\lim \dfrac{x_n}{2+n^2} = 0$.

7. Sejam (a_n) uma sequência limitada e (b_n) uma sequência convergente.

   (a) Se $\lim b_n = 0$, mostre que $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$.

   (b) Se $\lim b_n \neq 0$, construa um exemplo no qual o limite $\lim(a_n \cdot b_n)$ não existe.

8. Sejam (a_n), (b_n) e (c_n) três sequências de números reais tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sabendo que (a_n) e (c_n) são sequências convergentes, verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas:

   (a) (b_n) é convergente;

   (b) (b_n) é limitada;

   (c) Se $\lim a_n = \lim c_n = L$ então $\lim b_n = L$.

   Obs.: quando uma afirmação for verdadeira é necessário demonstrá-la; caso seja falsa, apresente um contra-exemplo.