CAPÍTULO IV

OS NÚMEROS RACIONAIS

1. Introdução

Sempre que a divisão de um inteiro por outro não era exata, os egípcios antigos, já por volta do ano 2000 a.C., usavam frações para exprimir o resultado. E usavam também frações para operar com seu sistema de pesos e medidas.

Contudo, por razões difíceis de explicar, com exceção das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, às vezes, os egípcios usavam apenas *frações unitárias*, ou seja, frações cujo numerador é 1. Por exemplo, no problema 24 do papiro Rhind (cerca de 1700 a.C.) no qual o escriba pede que se efetue a divisão de 19 por 8, a resposta é dada, usando a nossa notação, por:

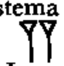
$$2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

Embora os egípcios não adotassem sempre o mesmo procedimento, pode-se mostrar que toda fração entre 0 e 1 é soma de frações unitárias, o que representa uma garantia teórica para essa opção.

Aliás, o uso das frações unitárias, além de não ficar confinado ao Egito antigo, se estendeu por vários séculos. Basta dizer que Fibonacci, no seu já citado *Liber abaci*, escrito no século XIII d.C. (cap. II, item 11), não só as usava como fornecia tabelas de conversão das frações comuns para unitárias. É que, embora uma das finalidades dessa obra fosse divulgar os numerais indo-arábicos e a notação decimal posicional, Fibonacci não chegou a perceber a grande vantagem deste sistema: sua aplicabilidade para exprimir frações. Por exemplo:

$$\frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Mas convém registrar que os babilônios, 2 000 anos antes de Cristo, apesar de algumas ambigüidades, decorrentes de não contarem com um símbolo para o zero e outro para a separatriz, conseguiram estender o princípio posicional às frações no seu sistema de base 60. Por exemplo, o numeral



que, como já vimos no capítulo I, poderia representar o inteiro $1 + 1 \cdot 60 = 61$, também poderia ser uma representação de

$$1 + \frac{1}{60}$$

Na verdade o uso da *forma decimal* para representar frações, tal como em $\frac{1}{4} = 0{,}25$, somente começaria a vingar após a publicação, em 1585, de um pequeno texto de Simon Stevin (1548-1620) intitulado *De thiende* (O décimo). Embora a essa altura a forma decimal já não constituísse uma novidade para os especialistas, esse trabalho de Stevin alcançou grande popularidade e conseguiu seu intento, que era ensinar a "como efetuar, com facilidade nunca vista, todos os cálculos necessários entre os homens, por meio de inteiros sem frações". A notação inicialmente usada por Stevin acabou sendo melhorada com o emprego da vírgula ou do ponto como separatriz decimal, conforme sugestão de John Napier (1550-1617), feita em 1617.

2. A divisão em $\mathbb{Z}$

Sejam $a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$. Se a é múltiplo de b, então existe um único $c \in \mathbf{Z}$ de maneira que $a = bc$. Este elemento c é chamado *quociente* de a por b e costuma ser indicado por:

$$c = \frac{a}{b} \text{ ou } c = a : b$$

A operação que a cada par (a, b), nas condições expostas, associa $c = a : b$ é a *divisão em* $\mathbf{Z}$. Portanto a divisão em $\mathbf{Z}$ só está definida em

$$\{(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : b \neq 0 \text{ e } b | a\}$$

Mas certas questões corriqueiras ao homem há milênios, como a citada no item anterior de dividir 19 por 8, embora envolvendo só números inteiros, não admitem uma resposta no âmbito de $\mathbf{Z}$. É coerente indicar essa resposta por $\frac{19}{8}$, uma vez que se o primeiro número fosse 16 ela se exprimiria por $2 = \frac{16}{8}$. Cumpre então ampliar $\mathbf{Z}$ convenientemente de maneira

a poder abarcar todos os quocientes $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0)$ que possam surgir de questões da mesma natureza da que acabamos de lembrar.

Essa ampliação, tal como no caso de $\mathbb{N}$ para $\mathbf{Z}$, pode ser feita de duas maneiras: elementarmente, agregando-se a $\mathbf{Z}$ os novos quocientes e definindo no conjunto resultante as operações e a relação de ordem convenientes; ou formalmente, construindo a partir de $\mathbf{Z}$ um novo conjunto, com os requisitos desejados, mas de tal modo que uma de suas partes possa ser identificada plenamente com $\mathbf{Z}$. É claro que historicamente o caminho seguido foi o primeiro.

Optamos por fazer a construção formal do conjunto dos números racionais (a ampliação pretendida de $\mathbf{Z}$) já no corpo do capítulo porque, além de um pouco menos penosa que a de $\mathbf{Z}$, é mais difundida, mesmo em nível elementar, e portanto trata-se de algo certamente mais familiar ao leitor.

3. Números racionais: construção, operação e relação de ordem

Seja $\mathbf{Z}^* = \{m \in \mathbf{Z} | m \neq 0\}$ e consideremos sobre $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* = \{(m, n) | m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}^*\}$ a relação $\sim$ definida por

$$(m, n) \sim (p, q) \text{ se, e somente se, } mq = np$$

Para $\sim$ valem as três propriedades que caracterizam uma relação de equivalência, ou seja:

i $(m, n) \sim (m, n)$, para todo $(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ (reflexiva)
ii $(m, n) \sim (p, q) \Rightarrow (p, q) \sim (m, n)$ (simétrica)
iii $(m, n) \sim (p, q)$ e $(p, q) \sim (r, s) \Rightarrow (m, n) \sim (r, s)$ (transitiva)

Verifiquemos **iii** já que **i** e **ii** decorrem diretamente da definição de $\sim$. Por hipótese: $mq = np$ e $ps = qr$. Multiplicando a primeira dessas igualdades por s e a segunda por n, resulta: $mqs = nps$ e $nps = nqr$. Daí, $mqs = nqr$ e portanto, cancelando q, o que é possível pois $q \in \mathbf{Z}^*$, obtém-se $ms = nr$. Donde $(m, n) \sim (r, s)$.

Logo a relação $\sim$ determina sobre $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ uma partição em classes de equivalência. Para cada par $(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, a classe de equivalência à qual esse elemento pertence será indicada por $\frac{m}{n}$. Ou seja:

$$\frac{m}{n} = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* | (x, y) \sim (m, n)\} = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* | nx = my\}$$

Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* | 2x = y\} = \{(1, 2); (-1, -2); (2, 4); (-2, -4); \ldots\}$$

Devido à propriedade reflexiva, é claro que $(m, n) \in \frac{m}{n}$, para todo $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Além disso, como

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \iff (m, n) \sim (r, s)$$

(resultado da teoria das relações de equivalência), então:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \iff ms = nr$$

Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4} = \frac{-2}{-4} = \dots$$

O conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por $\sim$, ou seja, o conjunto de todas as classes de equivalência determinada por $\sim$ sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, será designado por $\mathbb{Q}$. Logo:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,|\, (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}$$

Assim, cada $a \in \mathbb{Q}$ admite infinitas representações $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}$; $n \in \mathbb{Z}^*$). Em cada uma delas m é o *numerador* e n o *denominador*. Dois elementos a, $b \in \mathbb{Q}$ sempre admitem representações de denominadores iguais. De fato, se $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$, então

$$\frac{m}{n} = \frac{ms}{ns} \text{ e } \frac{r}{s} = \frac{nr}{ns}$$

pois $m(ns) = n(ms)$ e $r(ns) = s(nr)$.

Os elementos de $\mathbb{Q}$ são chamados *números racionais* desde que se definam adição, multiplicação e relação de ordem, conforme o faremos nos itens seguintes.

3.1 Adição em $\mathbb{Q}$

DEFINIÇÃO 1 Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Chama-se *soma* de a com b e indica-se por $a + b$ o elemento de $\mathbb{Q}$ definido da seguinte maneira:

$$a + b = \frac{ms}{ns} + \frac{nr}{ns} = \frac{ms + nr}{ns}$$

Mostremos que a soma $a + b$ independe dos pares ordenados escolhidos para definir a e b. De fato, se $a = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ e $b = \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$, então

$$mn' = nm' \text{ e } rs' = sr'$$

Multiplicando a primeira dessas igualdades por ss' e a segunda por nn' e somando membro a membro as relações obtidas

$$msn's' + rns'n' = nsm's' + nsr'n'$$

ou seja

$$(ms + rn)n's' = ns(m's' + r'n')$$

o que garante

$$\frac{ms + rn}{ns} = \frac{m's' + r'n'}{n's'}$$

Portanto a correspondência

$$(a, b) \to a + b,$$

conforme a definição 1, é uma aplicação e, portanto, trata-se de uma operação sobre $\mathbb{Q}$, à qual chamamos *adição em $\mathbb{Q}$*.

Para a adição em $\mathbb{Q}$ valem as seguintes propriedades:

a_1 $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ (associativa)

a_2 $a + b = b + a$, $\forall a, b, \in \mathbb{Q}$ (comutativa)

a_3 Existe elemento neutro: é a classe de equivalência $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \dots$, que indicamos por 0 apenas. De fato

$$\frac{m}{n} + \frac{0}{1} = \frac{m \cdot 1 + 0 \cdot n}{n \cdot 1} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{n}$$

para todo $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

a_4 Todo $a \in \mathbb{Q}$ admite simétrico aditivo (oposto) em $\mathbb{Q}$: se $a = \frac{m}{n}$, então $-a = \frac{-m}{n}$, pois:

$$\frac{m}{n} + \frac{-m}{n} = \frac{mn + (-m)n}{nn} = \frac{0}{nn} = 0$$

Usaremos a notação $\mathbb{Q}^* = \{a \in \mathbb{Q} \,|\, a \neq 0\}$.

DEFINIÇÃO 2 Se a, b $\in \mathbb{Q}$, denomina-se *diferença* entre a e b, e indica-se por a − b, o seguinte elemento de $\mathbb{Q}$:

$$a - b = a + (-b)$$

Como $(-b) \in \mathbb{Q}$, para todo $b \in \mathbb{Q}$, então

$$(a, b) \rightarrow a - b$$

é uma operação sobre $\mathbb{Q}$, à qual chamamos *subtração* em $\mathbb{Q}$.

Tal como ocorre em **Z** (cap. III, 3.1), valem em $\mathbb{Q}$ as seguintes propriedades, envolvendo a idéia de oposto e de subtração:

- $-(a + b) = -a - b$
- $(a - b) + b = a$
- $a + x = b \iff x = b - a$
- $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

Para demonstrá-las, o procedimento pode ser o mesmo usado para **Z**.

3.2 Multiplicação em $\mathbb{Q}$

DEFINIÇÃO 3 Chamamos *produto* de $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ por $b = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ o elemento

$$ab = a \cdot b = \frac{mr}{ns} \in \mathbb{Q}$$

o qual, pode-se mostrar (tal como foi feito para a soma em 3.1), não depende das particulares representações tomadas para a e b.

A *multiplicação* em $\mathbb{Q}$ é a operação definida por

$$(a, b) \longrightarrow ab$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$.

Valem as seguintes propriedades:

$\mathbf{m_1}$ $a(bc) = (ab)c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ (associativa)

$\mathbf{m_2}$ $ab = ba$, $\forall a, b, \in \mathbb{Q}$ (comutativa)

$\mathbf{m_3}$ Existe elemento neutro: é a classe

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \ldots$$

que indicamos simplesmente por 1. De fato:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{n}$$

para todo $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

$\mathbf{m_4}$ Todo $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, admite simétrico multiplicativo (inverso): se

$$a = \frac{m}{n}$$

então $m \neq 0$ e daí $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ e portanto

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{mn}{nm} = 1$$

Indicando por a^{-1}, como é praxe, o inverso de a, então

$$a = \frac{m}{n},\ a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} = \frac{n}{m}$$

Disso decorre também que se $a \neq 0$:

$$(a^{-1})^{-1} = \left(\frac{n}{m}\right)^{-1} = \frac{m}{n} = a$$

Outro fato importante no que se refere aos inversos é que se a e b são elementos não nulos:

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

De fato, como

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aa^{-1})(bb^{-1}) = 1$$

então efetivamente $a^{-1}b^{-1}$ é o inverso de ab.

d A multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$a(b + c) = ab + ac,\ \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$$

Nota (sobre a noção de *corpo*): Suponhamos que sobre um conjunto $K \neq \emptyset$ estejam definidas uma "adição" e uma "multiplicação", a primeira (segunda) associando a cada par de elementos $a, b \in K$ um único elemento, também de K, que se indica por a + b (respectivamente ab ou a · b) chamado soma de a com b (respectivamente, produto de a por b), de modo que:

i $(a+b)+c = a+(b+c)$ e $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in K$ (valem as propriedades associativas).

ii $a+b = b+a$ e $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in K$ (valem as propriedades comutativas).

iii Existem elementos u, $e \in K$ de modo que $a + u = a$ ($\forall a \in K$) e $a \cdot e = a$ ($\forall a \in K$), ou seja, existem elementos neutros para ambas as operações. Para facilitar a notação é comum fazer $u = 0$ e $e = 1$.

iv Para todo $a \in K$ existe $a' \in K$, de modo que $a + a' = 0$ (todo $a \in K$ admite simétrico aditivo a'); e para todo $a \in K^* = K - \{0\}$ existe $a'' \in K$, para o qual se verifica $aa'' = 1$ (a'' é o simétrico multiplicativo de a). A notação usual para os simétricos é: $a' = -a$ e $a'' = a^{-1}$.

v para quaisquer $a, b, c \in K$

$$a(b+c) = ab + ac$$

(a multiplicação é distributiva em relação à adição).

Nessas condições diz-se que sobre K está definida uma *estrutura de corpo* ou, simplesmente, que K é um corpo. Essas designações são tiradas da álgebra. Note-se que todo corpo é um anel comutativo (ver exercício 364).

Logo, $\mathbb{Q}$ é um exemplo de corpo. Outro exemplo já visto neste texto é o do conjunto $\mathbb{Z}_m$, para m primo, com a adição e a multiplicação módulo m (Apêndice III, cap. III). No capítulo V estudaremos o corpo dos números reais.

Convém ainda destacar os seguintes resultados para a multiplicação em $\mathbb{Q}$:

- $a(b-c) = ab - ac$
- $a \cdot 0 = 0$
- $a(-b) = (-a)b = -(ab)$
- $(-a)(-b) = ab$

Todas essas propriedades podem ser provadas como as respectivas de $\mathbb{Z}$ (cap. III, 3.2).

- $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$

Prova: Supondo $a \neq 0$, então de $ab = 0$ decorre $a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0$. Como $a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = b$, então $b = 0$.

- $(ab = ac$ e $a \neq 0) \Rightarrow b = c$

Prova: $ab = ac \Rightarrow ab + [-(ac)] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow ab + a(-c) = 0 \Rightarrow a(b-c) = 0 \overset{(a \neq 0)}{\Rightarrow} b - c = 0 \Rightarrow b = c.$

Na verdade, as duas últimas propriedades (lei do anulamento do produto e lei do cancelamento da multiplicação) são logicamente equivalentes entre

si. A demonstração que acabamos de fazer mostra que a última lei citada é conseqüência da primeira. Quanto à recíproca, supondo $a \neq 0$ e $ab = 0$, como $0 = a \cdot 0$, então $ab = a \cdot 0$ e, pela hipótese, $b = 0$.

- Para todo $a \in \mathbb{Q}^*$: $ax = b \iff x = a^{-1}b$.

$\Rightarrow$ Da hipótese segue que $a^{-1}(ax) = a^{-1}b$. Mas $a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x = 1 \cdot x = x$. Logo $x = a^{-1}b$.

$\Leftarrow$ Como $x = a^{-1}b$, então

$$ax = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = 1 \cdot b = b$$

DEFINIÇÃO 4 Entendemos por *divisão em $\mathbb{Q}$* a operação de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ em $\mathbb{Q}$ definida por

$$(a, b) \to ab^{-1}$$

O elemento ab^{-1} é chamado *quociente* de a por b e pode ser indicado por $a : b$.

Por exemplo, se $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{1}{5}$, então:

$$a : b = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{10}{3}$$

Para a divisão em $\mathbb{Q}$ vale a seguinte propriedade: se $a, b, c \in \mathbb{Q}$ e $c \neq 0$, então:

$$(a+b) : c = a : c + b : c$$

De fato, se $c = \frac{r}{s}$ $(r, s \in \mathbb{Z}^*)$, então:

$$(a+b) : c = (a+b) \cdot \frac{s}{r} = a \cdot \frac{s}{r} + b \cdot \frac{s}{r} = a : \frac{r}{s} + b : \frac{r}{s} = a : c + b : c.$$

3.3 Somas e produtos de mais de dois elementos em $\mathbb{Q}$

A maneira de estender o conceito de soma e o de produto para n números racionais $(n > 2)$ segue o procedimento de sempre em situações análogas. Se $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ $(n > 2)$, por recorrência definem-se

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_n \text{ e } a_1 a_2 \ldots a_n = (a_1 a_2 \ldots a_{n-1}) a_n$$

ou, com os símbolos usuais de somatório e produtório:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) a_n$$

Se fizermos, para n = 1,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \quad e \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1$$

torna-se mais fácil expressar (e até provar) algumas propriedades envolvendo n números racionais ($n \geq 1$). Destaquemos a generalização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (cuja demonstração é análoga à que foi feita no cap. III, 4.3, para $\mathbb{N}$): se $a, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}$ ($n \geq 1$), então

$$a\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (ab_i)$$

Mas também podemos generalizar propriedades mais específicas de $\mathbb{Q}$. Por exemplo, se $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}^*$, então

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{-1}$$

ou seja, "o inverso de um produto de elementos não nulos é o produto dos inversos". De fato:

$$n = 1: \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{-1} = a_1^{-1} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{-1}$$

$$\text{Vamos supor } \left(\prod_{i=1}^{r} a_i\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{r} a_i^{-1} \qquad (r \geq 1)$$

$$n = r + 1: \prod_{i=1}^{r+1} a_i^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{r} a_i^{-1}\right) a_{r+1}^{-1} \overset{(*)}{=}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{r} a_i\right)^{-1} \cdot a_{r+1}^{-1} \overset{(**)}{=} \left[\left(\prod_{i=1}^{r} a_i\right) \cdot a_{r+1}\right]^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{r+1} a_i\right)^{-1}$$

Note-se que em (*) usamos a hipótese de indução e que em (**) o fato de o resultado ser válido para n = 2, o que já havia sido demonstrado em 3.2.

Exemplo 1: Seja $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Para um inteiro m qualquer, entende-se por *potência* m-ésima de a o elemento $a^m \in \mathbb{Q}$ assim definido:

Se $m \geq 0$, recursivamente por

$$a^0 = 1$$
$$a^{m+1} = a^m \cdot a, \text{ sempre que } m \geq 0.$$

Se $m < 0$, então:

$$a^m = (a^{-1})^{-m}$$

Essa definição implica que, quando $m > 0$, então $a^m = a \cdot a \ldots a$ (m fatores).

Mostremos que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ para todo $a \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ e quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$.

Primeiro notemos que mesmo quando $n < 0$ vale $a^n \cdot a = a^{n+1}$ De fato, se $n < 0$, então $-n = p > 0$ e, portanto:

$$a^n \cdot a = (a^{-1})^p \cdot a = [(a^{-1})^{p-1} \cdot a^{-1}] \cdot a = (a^{-1})^{p-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) =$$
$$= (a^{-1})^{p-1} = (a^{-1})^{-n-1} = (a^{-1})^{-(n+1)} = a^{n+1}$$

Suponhamos um dos expoentes positivo (digamos $n \geq 0$) e procedamos por indução sobre ele.

$$n = 0 : a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0}$$

Suponhamos $r \geq 0$ e $a^m \cdot a^r = a^{m+r}$

$n = r + 1$:
$a^m \cdot a^{r+1} = a^m \cdot (a^r \cdot a) = (a^m \cdot a^r) \cdot a = a^{m+r} \cdot a = a^{(m+r)+1} = a^{m+(r+1)}$

Por último, se $m, n < 0$, então $m + n < 0$ e, portanto:

$$a^{m+n} = (a^{-1})^{-(m+n)} = (a^{-1})^{(-m)+(-n)} = (a^{-1})^{-m} \cdot (a^{-1})^{-n} = a^m \cdot a^n$$

Registremos ainda que, por definição, para todo $m \in \mathbb{N}^*$:

$$0^m = 0$$

Propomos como exercício a demonstração das seguintes propriedades:

- $(a^m)^n = a^{mn}$, $\forall a \in \mathbb{Q}^*$ e $\forall m, n \in \mathbb{Z}$
- $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n = a^{-n}$, $\forall a \in \mathbb{Q}^*$ e $\forall n \in \mathbb{Z}$.

3.4 Relação de ordem em $\mathbb{Q}$

Seja $a = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Como

$$a = \frac{m}{n} = \frac{-m}{-n}$$

pois $m(-n) = n(-m)$, então sempre podemos considerar, para todo $a \in \mathbb{Q}$, uma representação em que o denominador seja maior que zero (em $\mathbb{Z}$).
Por exemplo:

$$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} \text{ e } \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

DEFINIÇÃO 5 Sejam a e b elementos de $\mathbb{Q}$ e tomemos, para cada um deles, uma representação $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ em que o denominador seja estritamente positivo. Nessas condições, diz-se que a *é menor que ou igual a* b, e escreve-se $a \leqslant b$, se $ms \leqslant nr$ (obviamente esta última relação é considerada em $\mathbb{Z}$). Equivalentemente pode-se dizer que b *é maior que ou igual a* a e anotar $b \geqslant a$. Com as mesmas hipóteses, se $ms < nr$, diz-se que a *é menor que* b (notação: $a < b$) ou que b *é maior que a* (notação: $b > a$).

Por exemplo:

$\frac{-2}{3} < \frac{1}{4}$ porque $-8 < 3$

$\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$ porque $25 > 24$

Pode-se mostrar que a definição 5 não depende dos pares ordenados eventualmente escolhidos para expressar a e b.

Um elemento $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ onde $n > 0$, se diz *positivo* se $a \geqslant 0$. Lembrando que $0 = \frac{0}{1}$, então:

$$a \geqslant 0 \iff \frac{m}{n} \geqslant \frac{0}{1} \iff m \geqslant 0$$

Quando $a > 0$, o que equivale (supondo como sempre $n > 0$) a $m > 0$, a se diz *estritamente positivo*. Se $a \leqslant 0$ ($\iff m \leqslant 0$ se $n > 0$), diz-se que a é *negativo* e se $a < 0$ ($\iff m < 0$ se $n > 0$), então o elemento a é chamado *estritamente negativo*.

Exemplo 2: Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$. Mostremos que se $a > b$, então existe $h \in \mathbb{Q}$, $h > 0$, de maneira que $a = b + h$.

De fato, suponhamos $a = \frac{r}{s}$ e $b = \frac{t}{s}$, onde $s > 0$. Como

$$\frac{r}{s} > \frac{t}{s}$$

então $r > t$ (em $\mathbb{Z}$) e, portanto, existe $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, de modo que $r = t + n$.

Daí

$$\frac{r}{s} = \frac{t+n}{s} = \frac{t}{s} + \frac{n}{s}$$

onde

$$h = \frac{n}{s} > 0$$

pois $n > 0$.

Mostraremos a seguir que $\leqslant$, conforme definição 5, é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{Q}$, compatível com a adição e a multiplicação definidas em 3.1 e 3.2. Para tanto admitiremos que todos os denominadores que intervierem nos enunciados das propriedades sejam inteiros estritamente positivos.

O_1 $\frac{m}{n} \leqslant \frac{m}{n}$ (reflexiva)

Evidente, pois $mn \leqslant nm$

O_2 $\frac{m}{n} \leqslant \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \leqslant \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{r}{s}$ (anti-simétrica)

Como $ms \leqslant nr$ e $rn \leqslant sm$ (em $\mathbb{Z}$), então $ms = nr$. Logo:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$$

O_3 $\frac{m}{n} \leqslant \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \leqslant \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{m}{n} \leqslant \frac{p}{q}$ (transitiva)

De fato, como $ms \leqslant nr$ e $rq \leqslant sp$, multiplicando a primeira dessas relações por $q > 0$ e a segunda por $n > 0$:

$$msq \leqslant nrq \text{ e } rqn \leqslant spn$$

Daí, usando a transitividade de $\leqslant$ em $\mathbb{Z}$,

$$msq \leqslant spn$$

E, uma vez que $s > 0$, pode-se concluir que

$$mq \leqslant pn$$

Logo:

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{p}{q}$$

O_4 $\frac{m}{n} \leqslant \frac{r}{s}$ ou $\frac{r}{s} \leqslant \frac{m}{n}$

Evidente, pois em $\mathbb{Z}$: $ms \leqslant nr$ ou $nr \leqslant ms$.

Nota: As propriedades O_1 a O_4 garantem que $\leqslant$, conforme definição 5, é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{Q}$.

O_5 $\frac{m}{n} \leqslant \frac{r}{s} \Rightarrow \frac{m}{n} + \frac{p}{q} \leqslant \frac{r}{s} + \frac{p}{q}$, para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($\leqslant$ é compatível com a adição de $\mathbb{Q}$).

De fato, como por hipótese $ms \leqslant nr$, então $msq^2 \leqslant nrq^2$, e daí:

$$msq^2 + pnsq \leqslant nrq^2 + pnsq$$

Ou seja:

$$(mq + pn)sq \leqslant nq(rq + ps)$$

Donde:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq} \leqslant \frac{rq + ps}{sq} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}$$

O_6 $\frac{m}{n} \leqslant \frac{r}{s}$ e $0 \leqslant \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \leqslant \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q}$ ($\leqslant$ é compatível com a multiplicação de $\mathbb{Q}$).

Por hipótese, $ms \leqslant nr$ e $p \geqslant 0$ (além de $n, s, q > 0$). Assim $pq \geqslant 0$ e portanto

$$(ms)(pq) \leqslant (nr)(pq)$$

ou

$$(mp)(sq) \leqslant (nq)(rp)$$

onde $sq > 0$ e $nq > 0$. Logo:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq} \leqslant \frac{rp}{sq} = \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q}$$

Nota: Seja K um corpo e suponhamos que sobre K esteja definida uma relação $\leqslant$ tal que: **i** $a \leqslant a$ (reflexiva); **ii** $a \leqslant b$ e $b \leqslant a \Rightarrow a = b$ (anti-simétrica); **iii** $a \leqslant b$ e $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$ (transitiva); **iv** $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$, para quaisquer $a, b \in K$; **v** $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$, para todo $c \in K$ ($\leqslant$ é compatível com a adição de $\mathbb{Q}$); **vi** $a \leqslant b$ e $0 \leqslant c \Rightarrow ac \leqslant bc$ ($\leqslant$ é compatível com a multiplicação de $\mathbb{Q}$). Nessas condições diz-se que K é um *corpo ordenado*.

Portanto $\mathbb{Q}$ é um exemplo (evidentemente muito importante) de corpo ordenado. Porém o exemplo mais importante é o dos números reais — a ser focalizado no capítulo V.

Se K é um corpo ordenado e se $a, b \in K$, escreve-se $a < b$ para indicar que $a \leqslant b$ e $a \neq b$. (Esse conceito é coerente com a relação "x é menor que y" conforme definição 5.) Para a relação $<$ num corpo ordenado K, vale a *lei da tricotomia*: "Para quaisquer $x, y \in K$, ou $x = y$ ou $x < y$ ou $y < x$, exclusivamente". De fato a propriedade **iv** impõe que $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$; assim, se $x \neq y$, então $x < y$ ou $y < x$. Não se pode ter simultaneamente $x < y$ e $y < x$ pois isto equivale a ($x \leqslant y$ e $x \neq y$) e ($y \leqslant x$ e $y \neq x$), do que segue $x = y$ e $x \neq y$.

Outras propriedades:

As propriedades enunciadas a seguir, envolvendo as relações $\leqslant$, $>$ e $<$ sobre $\mathbb{Q}$, independem todas de $\mathbf{m}_4$, razão pela qual podem ser demonstradas tal como as correspondentes de $\mathbb{Z}$.

Se, a, b, c, d, a_i, b_i indicam elementos genéricos de $\mathbb{Q}$, então:

- $a \leqslant b \iff 0 \leqslant b - a \iff -b \leqslant -a$
- $a < b \iff 0 < b - a \iff -b < -a$
- $a \leqslant b$ e $c \leqslant d \Rightarrow a + c \leqslant b + d$
- $a_i \leqslant b_i (i = 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i$
- Se $a_i \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e, para algum r, $1 \leqslant r \leqslant n$, $a_r < b_r$, então
$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{i=1}^{n} b_i$$
- *Regras de sinais*: **i** $a > 0$ e $b > 0 \Rightarrow ab > 0$; **ii** $a < 0$ e $b < 0 \Rightarrow ab > 0$ **iii** $a < 0$ e $b > 0 \Rightarrow ab < 0$
- $a^2 \geqslant 0$; $a^2 > 0$ sempre que $a \neq 0$
- $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
- $a < b$ e $c < 0 \Rightarrow ac > bc$
- $ac \leqslant bc$ e $c > 0 \Rightarrow a \leqslant b$
- $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant 0$; $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \iff a_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

PROPOSIÇÃO 1 Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$:

i $(a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0)$ e $(a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0)$
ii $(0 < a < 1 \Rightarrow 1 < a^{-1})$ e $(1 < a \Rightarrow 0 < a^{-1} < 1)$
iii $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$
iv $a < b < 0 \Rightarrow b^{-1} < a^{-1} < 0$

Demonstração:

i Como $a^{-1} \neq 0$, pois $a^{-1} \cdot a = 1$, então $(a^{-1})^2 > 0$. Desta relação e da hipótese $0 < a$ decorre:

$$0 \cdot (a^{-1})^2 < a \cdot (a^{-1})^2$$

Ou seja: $0 < a^{-1}$. Fica como exercício a demonstração da segunda parte.

ii Como $a^{-1} > 0$, em virtude de **i**, então multiplicando os termos de $0 < a < 1$ (hipótese) por a^{-1}:

$$0 \cdot a^{-1} < a \cdot a^{-1} < 1 \cdot a^{-1}$$

o que implica $0 < 1 < a^{-1}$. A demonstração da segunda parte é análoga.

iii Como $a^{-1} > 0$ e $b^{-1} > 0$ em virtude da primeira parte, então $a^{-1} \cdot b^{-1} > 0$. Multiplicando os termos de $0 < a < b$ (hipótese) por $a^{-1} \cdot b^{-1}$:

$$0 \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) < a \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) < b \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1})$$

Donde: $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

iv Fica como exercício. ■

3.5 Imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ (os inteiros como particulares números racionais)

Consideremos o número $2 \in \mathbb{Z}$ e o elemento

$$\frac{8}{4} = \{(2, 1); (-2, -1); (4, 2); (-4, -2); \ldots\}$$

por exemplo. É de se esperar, tendo em vista o objetivo da construção de $\mathbb{Q}$, que tais elementos possam ser identificados. Mas o que justificaria essa identificação se se trata de coisas que num primeiro exame se mostram muito diferentes?

Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por:

$$f(m) = \frac{m}{1}, \ \forall m \in \mathbb{Z}$$

Para essa aplicação vale o seguinte:

- $f(m) = f(n) \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{n}{1} \Rightarrow m = n$ e, portanto, f é injetora.
- Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$f(m + n) = \frac{m+n}{1} = \frac{m}{1} + \frac{n}{1} = f(m) + f(n)$$

- Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$

$$f(mn) = \frac{mn}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} = f(m)\, f(n)$$

- Se $m \leqslant n$, então:

$$f(m) = \frac{m}{1} \leqslant \frac{n}{1} = f(n)$$

Essas propriedades de f significam que a imagem de $\mathbb{Z}$ por f, ou seja

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ \frac{m}{1} \middle| m \in \mathbb{Z} \right\}$$

pode ser vista como uma cópia de $\mathbb{Z}$. Devido a esse fato cada inteiro m se confunde com sua imagem $\frac{m}{1}$ $\left(\text{ou seja, } m = \frac{m}{1}\right)$ e portanto $\mathbb{Z}$ passa a ser identificado com Im(f). Como $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{Q}$, então $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Levando em conta que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, pode-se concluir que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. A função f é chamada *função imersão* de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$.

Isso posto, se $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, então:

$$m : n = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

Por outro lado, dado o número racional $\frac{m}{n}$, então:

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = m : n$$

Por isso chamamos cada representação $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$; $n \neq 0$) de um número racional dado de *fração ordinária* de numerador m e denominador n. Se $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$, a fração se diz *irredutível*.

Ademais, se m é múltiplo de n, digamos $m = nr$ ($r \in \mathbb{Z}$), então:

$$m : n = \frac{m}{n} = \frac{nr}{n} = \frac{r}{1} = r$$

Ou seja, a divisão de um inteiro m por um inteiro $n \neq 0$ não só é sempre possível em $\mathbb{Q}$ como, quando m é múltiplo de n, o resultado coincide com o que se teria em $\mathbb{Z}$.

O conjunto $\mathbb{Q}$, construído da maneira como o fizemos, com a adição, a multiplicação e a relação de ordem que definimos, é o *conjunto dos números racionais* e seus elementos, os *números racionais*, como já havíamos antecipado ao início deste parágrafo.

PROPOSIÇÃO 2 Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$, se $a < b$, então existe $c \in \mathbb{Q}$ para o qual vale $a < c < b$.

Demonstração: A hipótese $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, implica que $a + a < a + b$ e $a + b < b + b$. Logo $a + a < a + b < b + b$. Mas

$$a + a = 1 \cdot a + 1 \cdot a = (1 + 1)a = 2a$$

e, analogamente, $b + b = 2b$. Logo:

$$2a < a + b < 2b$$

Multiplicando os termos dessa desigualdade por $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}(2a) < \frac{1}{2}(a + b) < \frac{1}{2}(2b)$$

Como

$$\frac{1}{2}(2a) = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)a = 1 \cdot a = a$$

e, da mesma forma

$$\frac{1}{2}(2b) = b$$

então:

$$a < \frac{1}{2}(a + b) < b$$

Como

$$c = \frac{1}{2}(a + b) \in \mathbb{Q}$$

o teorema está demonstrado. ■

COROLÁRIO: O conjunto dos elementos estritamente positivos de $\mathbb{Q}$ não tem mínimo.

De fato, se $0 < a$, então

$$0 < \frac{1}{2}a < a$$ ■

Nota: Um corpo K se diz *denso* quando, para quaisquer $a, b \in K$, $a < b$ (o que significa $a \leqslant b$ e $a \neq b$), existe $c \in K$ de modo que $0 < c < b$. A proposição 2 mostra exatamente que o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso.

PROPOSIÇÃO 3 Se a e b são números racionais e se $b > 0$, então existe $n \in \mathbb{N}^*$ de maneira que $nb > a$.

Demonstração: Podemos supor

$$a = \frac{r}{s} \text{ e } b = \frac{t}{s}$$

onde $s > 0$ e $t > 0$ (pelo fato de $b > 0$). Como já vimos no capítulo III, 6.2, existe $n \in \mathbb{N}^*$ de modo que $nt > r$. Daí segue que $nts > sr$. Logo:

$$\frac{nt}{s} > \frac{r}{s}$$

Mas

$$n\frac{t}{s} = \frac{n}{1}\frac{t}{s} = \frac{nt}{s}$$

Assim:

$$n\frac{t}{s} > \frac{r}{s}$$

Ou seja: $nb > a$.

■

Nota: Um corpo ordenado K se diz *arquimediano* se, para quaisquer $a, b \in K$, $b > 0$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ de maneira que

$$nb = b + b + \ldots + b > a \; (\Longleftrightarrow \; a < nb)$$

onde o número de parcelas iguais a b é evidentemente n. Assim, a proposição 3 nos assegura que o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos números racionais é arquimediano.

EXERCÍCIOS

Nos exercícios deste capítulo usaremos as expressões "números racionais" e "frações ordinárias" com o mesmo significado.

365. Mostre que:

a) $\frac{1\,515}{3\,333} = \frac{15}{33}$ b) $\frac{131\,313}{999\,999} = \frac{13}{99}$ c) $\frac{2\,323}{9\,999} = \frac{23}{99}$

Resolução de a):

$$\frac{1\,515}{3\,333} = \frac{15 \cdot 100 + 15}{33 \cdot 100 + 33} = \frac{15 \cdot (100 + 1)}{33 \cdot (100 + 1)} = \frac{15}{33}$$

366. Ache uma fração ordinária igual a $\frac{1\,001}{715}$ cuja soma do numerador com o denominador seja 48.

367. Ache uma fração ordinária igual a $\frac{399}{1\,463}$ de modo que a diferença entre seu denominador e seu numerador seja 184.

368. Ache duas frações ordinárias de denominadores 5 e 7 cuja soma é igual a $\frac{26}{35}$

369. Ache duas frações ordinárias de denominadores 3 e 11 cuja diferença seja igual a $\frac{6}{33}$.

Resolução: Sejam $\frac{x}{3}$ e $\frac{y}{11}$ as frações procuradas. Então:

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{11} = \frac{11x - 3y}{33} = \frac{6}{33}$$

Daí: $11x - 3y = 6$. Uma solução particular dessa equação diofantina é $(-6, -24)$. Logo, uma resposta ao problema é dada pelas frações $\frac{-6}{3} = -2$ e $\frac{-24}{11}$. Como $(-6 - 3t, -24 - 11t)$, $t \in \mathbb{Z}$, é a solução geral da equação diofantina obtida, então todo par de frações

$$\frac{-6 - 3t}{3}, \frac{-24 - 11t}{11} \ (t \in \mathbb{Z})$$

constitui uma solução do exercício.

370. Existem duas frações ordinárias de denominadores 7 e 11, com numeradores positivos, cuja soma seja $\frac{30}{77}$? Justifique a resposta.

371. Sejam $\frac{m}{n}$ e $\frac{r}{s}$ frações ordinárias irredutíveis. Mostre que:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \iff m = \pm r \text{ e } n = \pm s$$

372. Seja $\frac{m}{n}$ uma fração ordinária irredutível. Se $r \in \mathbb{Z}$, prove que

$$r + \frac{m}{n} = \frac{rn + m}{n}$$

também é irredutível.

373. Determine $r \in \mathbb{Z}$ de maneira que as seguintes frações ordinárias representem números inteiros:

a) $\frac{10r}{2r - 1}$ b) $\frac{33r}{3r - 1}$

Sugestão para a): $\frac{10r}{2r - 1} = 5 + \frac{5}{2r - 1}$

374. Se $n \in \mathbb{Z}$, mostre que são irredutíveis as frações:

a) $\frac{n - 1}{n - 2}$ $(n \neq 2)$ b) $\frac{n - 1}{2n - 1}$ c) $\frac{2n + 1}{2n(n + 1)}$ $(n \neq 0, -1)$

375. Se $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$, mostre que

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} = \frac{mu + rv}{nu + sv}$$

para quaisquer $u, v \in \mathbb{Z}$, ambos não nulos.

376. Sejam $\frac{r}{s}$ e $\frac{m}{n}$ frações irredutíveis. Mostre que

$$\frac{r}{s} + \frac{m}{n} = \frac{rn + ms}{sn}$$

é irredutível se, e somente se, $mdc\,(s, n) = 1$.

Resolução:

$\Rightarrow$ Vamos supor $mdc\,(s, n) > 1$ e seja p um divisor primo comum a s e a n. Mas então $p \mid (sn)$ e $p \mid (rn + ms)$, o que contraria a hipótese.

$\Leftarrow$ Se a soma não fosse irredutível, então sn e $(rn + ms)$ seriam divisíveis por um conveniente primo p. De $p \mid (sn)$, resulta que $p \mid s$ ou $p \mid n$.

Admitamos que $p|s$, como $p|(rn + ms)$, então $p|(rn)$; como $p \nmid r$ pois mdc $(s, r) = 1$, então $p|n$. Absurdo, já que, por hipótese, mdc $(s, n) = 1$. A hipótese $p|n$ leva igualmente a um absurdo.

377. Sejam r e s inteiros não nulos. Mostre que a fração ordinária $\frac{r^2 + s^2}{rs}$ representa um número inteiro se, e somente se, $r = \pm s$.

378. Mostre que as frações ordinárias $\frac{7n - 1}{4}$ e $\frac{5n + 3}{12}$ não podem representar números inteiros para o mesmo valor de $n \in \mathbb{Z}$.

379. Determine dois inteiros r e s, primos entre si, tais que:

$$\frac{r^2 - s^2}{r^3 - s^3} = \frac{13}{127}$$

Sugestão: Exercício 371.

380. Seja n um inteiro. Mostre que a fração $\frac{n^2 - 1}{3n + 1}$ é irredutível se, e somente se, n é ímpar.

Sugestão: Se $n^2 - 1 = r$ e $3n + 1 = s$, mostre que $s^2 - 2s - 9r = 8$.

381. Determine todas as frações ordinárias $\frac{r}{s}$ tais que $\frac{r - 27}{s} = \frac{r}{s + 12}$.

382. Sejam $\frac{r}{s}$ e $\frac{m}{n}$ frações ordinárias tais que $rn - ms = 1$.

a) Mostre que ambas as frações são irredutíveis.

b) Se $k \in \mathbb{Z}$ e $ks + n \neq 0$, mostre que $\frac{kr + m}{ks + n}$ também é irredutível.

383. Seja $n > 1$ um inteiro. Prove que $\frac{r}{s}$, onde $r = 15n^2 + 8n + 6$ e $s = 30n^2 + 21n + 13$, é irredutível.

Resolução: Notemos que $s = 30n^2 + 21n + 13 = 2(15n^2 + 8n + 6) + (5n + 1) = 2r + (5n + 1)$, ou seja, $s - 2r = 5n + 1$; ademais, $r = 15n^2 + 8n + 6 = (5n + 1)(3n + 1) + 5$. Assim, se $d|r$ e $d|s$, então $d|(s - 2r)$, ou seja $d|(5n + 1)$; mas então $d|5$, visto que $5 = r - (5n + 1)(3n + 1)$, e disso resulta que $d|5n$; donde $d|1$, pois $(5n + 1) - 5n = 1$. Assim $d = \pm 1$ e mdc $(r, s) = 1$.

384. Prove por indução que:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{n}{n + 1} \quad (n \geqslant 1)$$

385. Mostre que as seguintes somas não são números inteiros:

a) $S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ $(n > 1)$;

b) $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n + 1}$ $(n > 0)$

Resolução de a): Seja r o maior inteiro positivo tal que $2^r \leqslant n$ e seja k o produto dos ímpares $\leqslant n$. Então o produto $2^{r-1} \cdot k \cdot S_1$ é uma soma de $n - 1$ parcelas, todas números inteiros, exceto $2^{r-1} \cdot k \cdot \frac{1}{2^r} = \frac{k}{2}$. Ora, se S_1 fosse inteiro, o mesmo aconteceria com $\frac{k}{2}$ que é a diferença entre S_1 e a soma de $n - 2$ parcelas inteiras. Como $\frac{k}{2} \notin \mathbb{Z}$, então $S_1 \notin \mathbb{Z}$.

386. J. J. Sylvester (1814-1897) propôs o seguinte método para escrever um número racional a, $0 < a < 1$, como soma de frações unitárias (ver Introdução): **i** achar a maior fração unitária que seja menor que a fração dada; **ii** subtrair essa fração unitária da fração dada; **iii** achar a maior fração unitária menor que a diferença obtida em **ii**; **iv** subtrair desta diferença, a fração unitária obtida em **iii**; **v** continuar o processo até que uma das diferenças seja fração unitária.

Aplique esse processo às seguintes frações: $\frac{13}{20}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{9}{24}$ e $\frac{7}{52}$.

Resolução: $\frac{1}{a} < \frac{13}{20} \Rightarrow 20 < 13a$. Logo $a = 2$ é o menor natural para o qual a desigualdade se verifica. $\frac{1}{a} < \frac{13}{20} - \frac{1}{2} = \frac{3}{20} \Rightarrow 20 < 3a$; a escolha neste caso deve ser $a = 7$. Como $\frac{3}{20} - \frac{1}{7} = \frac{1}{140}$ é unitária, então

$$\frac{13}{20} = \frac{1}{2} + \frac{3}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{140}$$

387. a) Considere o polinômio unitário $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z})$. Se a fração ordinária irredutível $u = \frac{r}{s}$ é raiz de $f(x)$, isto é, $f(u) = 0$, prove que $s = \pm 1$ e que $r \mid a_0$ (ou seja, u é um divisor inteiro de a_0).

b) Determine as raízes racionais de $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 7x - 9$.

388. Mostre que os seguintes polinômios não admitem raízes racionais:

a) $f(x) = x^2 - 2$ b) $g(x) = x^3 - 2$ c) $h(x) = x^3 + x + 1$

389. Seja K um corpo. Uma aplicação bijetora $f\colon K \to K$ se diz um *automorfismo* de K se: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(xy) = f(x)f(y)$, para todo par de elementos $x, y \in K$. Mostre, através das etapas seguintes, que o único automorfismo f de $\mathbb{Q}$ é a aplicação idêntica: i $f(1) = 1$; ii $f(-a) = -f(a)$, $\forall a \in \mathbb{Q}$; iii $f(m) = m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$; iv $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; v $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Resolução: ii Como $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, então, pela lei do cancelamento da adição, $f(0) = 0$. Assim, $\forall a \in \mathbb{Q}$: $f(-a) + f(a) = f((-a) + a) = f(0) = 0$; então $f(-a) = -f(a)$. iv $1 = f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. v Admitindo $n > 0$, o que sempre é possível, $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = f(m)\, f\left(\frac{1}{n}\right) = m\,\frac{1}{n} = \frac{m}{n}$.

390. a) Ache duas frações ordinárias positivas, respectivamente iguais a $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{5}$ de maneira que a soma de seus termos (numerador e denominador) coincida e seja a menor possível.

b) Idem para as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{7}$.

Resolução de a): As frações procuradas são do tipo $\frac{x}{2x}$ e $\frac{4y}{5y}$, onde $x, y \in \mathbb{Z}_+^*$. Devemos impor que $x + 2x = 4y + 5y = s$, de onde resulta $x = \frac{s}{3}$ e $y = \frac{s}{9}$. Como s deve ser a menor possível, então $s = \text{mmc}(3,9) = 27$ (pois x e y são inteiros). Daí $x = 9$ e $y = 3$. A resposta é, então: $\frac{9}{18}$ e $\frac{12}{15}$.

391. Seja $\frac{r}{s}$ um número racional positivo não nulo. Prove que:

$$\frac{r}{s} + \frac{s}{r} \geqslant 2$$

Em que condições ocorre a igualdade?

392. a) Seja a um número racional tal que $0 < a < 1$. Mostre que existe $r \in \mathbb{N}^*$ para o qual

$$\frac{1}{r+1} \leqslant a < \frac{1}{r}$$

b) Ache r, conforme parte a), nos seguintes casos: $a = \frac{7}{22}$ e $a = \frac{47}{60}$.

393. Se $n > 1$ é um inteiro, prove que:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

394. Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ números racionais, $a < b$. Se $p, q \in \mathbb{N}^*$, prove que:

$$a < \frac{mp + rq}{np + sq} < b$$

4. Valor absoluto (ou Módulo)

DEFINIÇÃO 6 Damos o nome de *valor absoluto* de um elemento $a \in \mathbb{Q}$ ao próprio a se $a \geqslant 0$ e ao oposto de a, se $a < 0$. O valor absoluto de a é indicado por $|a|$. Assim:

$$|a| = a, \text{ se } a \geqslant 0 \text{ e } |a| = -a, \text{ se } a < 0$$

Obviamente, então, $|a| \geqslant 0$ para todo $a \in \mathbb{Q}$. **Por exemplo:**

$$\left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ e } \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

PROPOSIÇÃO 4 Para quaisquer a, b $\in \mathbb{Q}$ valem as seguintes relações:

i $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$

ii $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

iii $|a| - |b| \leqslant |a-b| \leqslant |a+b|$

iv $|ab| = |a||b|$

v Se $b \neq 0$, então $|b^{-1}| = |b|^{-1}$ e $|ab^{-1}| = |a||b|^{-1}$

Demonstração: As propriedades de **i** a **iv** podem ser provadas da mesma maneira que suas similares em $\mathbb{Z}$ (cap. III, 5), Quanto a **v**, observemos que:

$$bb^{-1} = 1 \Rightarrow |bb^{-1}| = |b||b^{-1}| = |1| = 1$$

de onde decorre que $|b^{-1}|$ é o inverso de $|b|$ e portanto $|b^{-1}| = |b|^{-1}$. Por último

$$|ab^{-1}| = |a||b^{-1}| = |a||b|^{-1}$$ ■

5. A função maior inteiro (sobre $\mathbb{Q}$)

DEFINIÇÃO 7 Seja a um número racional. Denotamos por [a] o maior inteiro que não ultrapassa a. Ou seja:

$$[a] = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant a\}$$

A função de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Z}$ definida por $x \to [x]$ chama-se *função maior inteiro* (sobre $\mathbb{Q}$).

Por exemplo:

$$[5] = 5; \left[\frac{5}{2}\right] = 2; \left[-\frac{5}{2}\right] = -3$$

PROPOSIÇÃO 5 Se a e b são números racionais quaisquer, então:

i $[a] \leqslant a < [a] + 1$ (logo $0 \leqslant a - [a] < 1$)

ii $a \leqslant b \Rightarrow [a] \leqslant [b]$ (a função maior inteiro é crescente)

iii $[a+m] = [a] + m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$

iv $[a] + [b] \leqslant [a+b] \leqslant [a] + [b] + 1$

Demonstração:

i É uma decorrência imediata da definição 7.

ii Suponhamos $[b] < [a]$, para um certo par a, b $\in \mathbb{Q}$, $a \leqslant b$. Sendo [b] e [a] inteiros, então $[b] + 1 \leqslant [a]$. Mas $b < [b] + 1$ (devido a i) e portanto $b < [a]$. Como $[a] \leqslant a$, então $b < a$, o que é absurdo.

iii Se $a_1 = a - [a]$, então $0 \leqslant a_1 < 1$ e $a = [a] + a_1$. Daí

$$[a+m] = [[a] + m + a_1] = [a] + m$$

uma vez que $[a] + m \in \mathbb{Z}$.

iv Façamos $a_1 = a - [a]$, $b_1 = b - [b]$ e $d = a + b - [a+b]$. Então $0 \leqslant a_1, b_1, d < 1$, $a = [a] + a_1$, $b = [b] + b_1$ e $a + b = [a+b] + d$. Daí:

$$a + b = [a] + [b] + (a_1 + b_1),\ 0 \leqslant a_1 + b_1 < 2$$

Como $[a] + [b] \in \mathbb{Z}$ pode-se aplicar **iii** à última igualdade, obtendo-se

$$[a+b] = [a] + [b] + [a_1 + b_1]$$

e como $[a_1 + b_1] = 0$ ou $[a_1 + b_1] = 1$, então:

$$[a+b] \leqslant [a] + [b] + 1 \qquad (*)$$

Por outro lado, levando em conta que $0 \leqslant a_1 + b_1 \leqslant 2$, então $[a_1 + b_1] \geqslant 0$. Donde

$$[a] + [b] \leqslant [a] + [b] + [a_1 + b_1] = [a+b] \qquad (**)$$

As conclusões (*) e (**) garantem a validade de **iv**. ■

PROPOSIÇÃO 6 Sejam m e n inteiros, $n > 0$. Se q é o quociente da divisão euclidiana de m por n, então $q = \left[\frac{m}{n}\right]$.

Demonstração: Vamos supor $m = nq + r$ $(0 \leqslant r < n)$. Então

$$\frac{m}{n} = \frac{nq + r}{n} = \frac{nq}{n} + \frac{r}{n} = q + \frac{r}{n}$$

Como $0 \leqslant r < n$, então

$$0 = \frac{0}{1} \leqslant \frac{r}{n} < \frac{1}{1} = 1$$

e portanto:

$$\left[\frac{r}{n}\right] = 0$$

Levando em conta **iii** da proposição anterior:

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \left[q + \frac{r}{n}\right] = q + \left[\frac{r}{n}\right] = q \qquad \blacksquare$$

Exemplo 3: Mostremos que o expoente com que um número primo $p > 0$ aparece como fator de $n!$, para todo $n \geqslant 1$, é:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots$$

É claro que se $p > n$, então p não é fator primo de n (logo de nenhum dos fatores de $n!$) e portanto se pode dizer que o expoente de p em $n!$ é zero. Como, neste caso, $n < p^r$ $(r \geqslant 1)$, então também

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots = 0$$

Se $p \leqslant n$, como o quociente da divisão de n por p é $\left[\frac{n}{p}\right]$ (proposição 6), então p é divisor dos seguintes fatores de $n!$: $p, 2p, \ldots, \left[\frac{n}{p}\right]p$ (e apenas destes), visto que $\left[\frac{n}{p}\right]$ p é o último múltiplo de p que não supera n. Assim, p é divisor de $\left[\frac{n}{p}\right]$ fatores de $n!$. Uma argumentação análoga mostra que, desses $\left[\frac{n}{p}\right]$ fatores, aqueles que são múltiplos de p^2 totalizam $\left[\frac{n}{p^2}\right]$. E assim por diante. Logo, o expoente de p em $n!$ é, efetivamente, a soma dada no enunciado.

Por exemplo, o expoente de 3 em $20!$ é

$$\left[\frac{20}{3}\right] + \left[\frac{20}{9}\right] = 6 + 2 = 8$$

6. Números racionais decimais

DEFINIÇÃO 8 Todo número racional que puder ser escrito sob a forma

$$\frac{r}{10^n}$$

onde $r \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, chama-se *número racional decimal*.

Por exemplo:

$$\frac{3}{10}, \frac{-19}{100}, \frac{1}{250} = \frac{4}{1\,000}$$

PROPOSIÇÃO 7 Um elemento $a \in \mathbb{Q}$ é um número racional decimal se, e somente se, existem $r \in \mathbb{Z}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, de maneira que

$$a = \frac{r}{2^\alpha \cdot 5^\beta}$$

Demonstração:

$\Leftarrow$ Vamos supor a conforme o enunciado. Então, admitindo-se por exemplo $\alpha \geqslant \beta$:

$$a = \frac{r}{2^\alpha \cdot 5^\beta} = \frac{r \cdot 5^{\alpha-\beta}}{2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 5^{\alpha-\beta}} = \frac{5^{\alpha-\beta} \cdot r}{10^\alpha}$$

e portanto a é um número racional decimal

$\Rightarrow$ Se a é racional decimal, então existem $r \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$ de modo que

$$a = \frac{r}{10^n} = \frac{r}{2^n \cdot 5^n}$$

o que encerra a demonstração. $\blacksquare$

6.1 *A representação decimal*

Consideremos, a título de ilustração para as considerações que faremos neste item, o seguinte número racional decimal:

$$\frac{12\,345}{1\,000}$$

Mais um detalhe: se a é inteiro (e todo inteiro é um racional decimal), então a representação decimal de a é o próprio a. De fato, neste caso podemos supor $r = 0$ e então $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$.

Apesar da grande vantagem prática da representação decimal sobre a fracionária, sua adoção foi um processo historicamente demorado. Um dos motivos dessa demora foi, com certeza, a dificuldade de estender essa representação adequadamente aos números racionais não decimais. Este assunto será focalizado no capítulo V (8).

Exemplo 4: O papel desempenhado pelos números racionais decimais em nosso sistema de numeração é ocupado, num sistema posicional qualquer de base $b > 1$, pelas frações:

$$a = \frac{n}{b^r} \quad (n, r \geqslant 0)$$

Consideremos por exemplo $b = 2$. Se a representação binária de n é

$$n = (b_1 b_2 \ldots b_s a_1 a_2 \ldots a_r)_2 =$$
$$a_r + a_{r-1} \cdot 2 + \ldots + a_1 \cdot 2^{r-1} + b_s \cdot 2^r + \ldots + b_1 \cdot 2^{r+s-1}$$

então

$$a = \frac{n}{2^r} = \frac{2^r \cdot m + a_1 \cdot 2^{r-1} + \ldots + a_{r-1} \cdot 2 + a_r}{2^r} =$$
$$= m + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_r}{2^r}$$

onde

$$m = b_s + b_{s-1} \cdot 2 + \ldots + b_1 \cdot 2^{s-1} = (b_1 b_2 \ldots b_s)_2$$

além de, obviamente, $0 \leqslant a_i, b_j < 2$. A *representação binária* de a é:

$$a = (m, a_1 a_2 \ldots a_r)_2$$

Por exemplo, se $n = 27$, então $n = (11\,011)_2$. Se considerarmos

$$a = \frac{n}{2^3}$$

então $r = 3$ e portanto $a_3 = 1$, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $b_2 = 1$ e $b_1 = 1$. Donde

$$a = (m, 011)_2$$

onde $m = (11)_2 = 3$.

EXERCÍCIOS

395. Determine:

a) $\left[\frac{3\,077}{1\,538}\right]$ c) $\left[m - \frac{1}{2}\right]$ onde $m \in \mathbb{Z}$ $(m < 0)$

b) $\left[-\frac{3\,075}{1\,538}\right]$ d) $\frac{m+1}{m}$, $m \neq 0$

396. Mostre que $[a] + [-a] = 0$ ou -1, conforme a seja inteiro ou não.

Sugestão: Se $a - [a] = a_1$, então $0 \leqslant a_1 < 1$ e $-a = -[a] - 1 + (1 - a_1)$.

397. Se a e b são números racionais positivos, mostre que $[a][b] \leqslant [ab]$.

398. Mostre que:

$$\left[\frac{a}{n}\right] = \left[\frac{[a]}{n}\right]$$

para todo inteiro $n > 0$.

Resolução: Seja $k = \left[\frac{a}{n}\right] - \left[\frac{a}{n}\right]$. Então $a = n\left[\frac{a}{n}\right] + kn$, onde $0 \leqslant kn < n$ (pois $0 \leqslant k < 1$ e $n > 0$). Logo (proposição 5, **iii**): $[a] = n\left[\frac{a}{n}\right] + [kn]$, o que implica $\frac{[a]}{n} = \left[\frac{a}{n}\right] + \frac{[kn]}{n}$. Usando mais uma vez a parte **iii** da proposição citada, considerando que $0 \leqslant \frac{[kn]}{n} < 1$:

$$\left[\frac{[a]}{n}\right] = \left[\frac{a}{n}\right]$$

399. Mostre que: $[a] + [b] + [a + b] \leqslant [2a] + [2b]$

Sugestão: Considere $a = [a] + a_1$, $0 \leqslant a_1 < 1$, e $b = [b] + b_1$, $0 \leqslant b_1 < 1$. Examine os casos em que nenhum, um ou ambos os números a_1 e b_1 são maiores ou iguais a $\frac{1}{2}$.

400. Sejam a e b $\in \mathbb{N}$, ambos maiores que 1. Prove que:

$$\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\right] + \ldots + \left[\frac{a}{b} + \frac{b-1}{b}\right] = a$$

Resolução (para o caso $1 < a < b$): Na seqüência de numeradores $a, a+1, \ldots, a+b-1$ aparece b pois $a < b$ e $b < a+b-1$ (já que $1 < a$). Do colchete correspondente ao numerador b em diante, todos são iguais a 1. Por exemplo, o primeiro deles é $\left[\frac{a}{b} + \frac{b-a}{b}\right] = \left[\frac{b}{b}\right] = 1$ e o último $\left[\frac{a}{b} + \frac{b-1}{b}\right] = \left[\frac{b}{b} + \frac{a-1}{b}\right] = 1$, pois $a - 1 < b$. Como o número destes colchetes iguais a 1 é a, e todos os anteriores são nulos, então a soma efetivamente é igual a a.

401. Mostre que $1\,000!$ termina em 249 zeros.

Sugestão: Exemplo 3.

402. Determine quais dos seguintes números são racionais decimais e ponha cada um destes na representação decimal.

a) $\frac{1}{256}$ b) $\frac{7}{2\,880}$ c) $\frac{1}{4\,375}$ d) $\frac{-13}{1\,040}$

403. Determine as frações ordinárias cuja representação decimal é a seguinte:

a) $12{,}0178$ c) $0{,}01075$

b) $-6{,}0001$ d) $-0{,}14005$

404. a) Ache o menor número decimal positivo pelo qual se devem multiplicar as frações $\frac{5}{16}$ e $\frac{5}{8}$ a fim de obter produtos inteiros.

b) Ache o menor número decimal positivo que, dividido pelas frações $\frac{16}{75}$ e $\frac{4}{15}$, fornece quocientes inteiros.

Resolução de a): Se $a = \frac{r}{10^n}$ é o número procurado, então

$$\frac{r}{10^n} \cdot \frac{5}{16} = \frac{r}{2^{n+4} \cdot 5^{n-1}} \quad \text{e} \quad \frac{r}{10^n} \cdot \frac{5}{8} = \frac{r}{2^{n+3} \cdot 5^{n-1}}$$

devem ser inteiros. O menor valor de r para que isso aconteça é $\text{mmc}(2^{n+4} \cdot 5^{n-1}, 2^{n+3} \cdot 5^{n-1}) = 2^{n+4} \cdot 5^{n-1}$. Assim

$$a = \frac{2^{n+4} \cdot 5^{n-1}}{10^n} = \frac{2^4}{5} = 3{,}2$$

405. Escreva em ordem crescente os seguintes números decimais:

$a = 0{,}245132$ $c = 0{,}245232$

$b = 0{,}245213$ $d = 0{,}245123$.

406. Sejam $x = 0, a_1a_2 \ldots a_r a_{r+1} a_{r+2} \ldots a_t$ e $y = 0, a_1a_2 \ldots a_r b_{r+1} b_{r+2} \ldots b_t$ números racionais decimais. Se $a_{r+1} > b_{r+1}$, prove que $x > y$.

407. a) Mostre que $\frac{2n+1}{n(n+1)}$ é irredutível, para todo $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $n \neq -1$.

b) Determine n a fim de que essa fração represente um número racional decimal.

Resolução de b): Devemos impor que $n(n+1) = 2^\alpha \cdot 5^\beta$ $(\alpha, \beta \geqslant 0)$. Como $\text{mdc}(n, n+1) = 1$, então há duas possibilidades: ($n = 2^\alpha$ e $n + 1 = 5^\beta$) ou ($n = 5^\beta$ e $n + 1 = 2^\alpha$). Examinemos a primeira. De $5^\beta = 2^\alpha + 1$ segue que $2^\alpha = 5^\beta - 1 = (5-1)(5^{\beta-1} + \ldots + 5 + 1) = 4 \cdot (5^{\beta-1} + \ldots + 5 + 1)$. É claro que $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ fornecem uma solução para o problema: neste caso $n = 4$. Vamos supor que pudesse haver uma solução para $\alpha > 2$. Então $2^{\alpha-2} = 1 + 5 + \ldots + 5^{\beta-1}$, o que obriga β a ser par; daí

$$\begin{aligned} &1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{\beta-2} + 5^{\beta-1} = \\ &= (1+5) + 5^2(1+5) + \ldots + 5^{\beta-2}(1+5) \end{aligned}$$

e como 3 divide esta soma, teria também que dividir $2^{\alpha-2}$, o que não é possível. Donde $n = 4$ é a única solução.

408. Dê a representação binária e a representação 6-nária (base 6) da fração $\frac{15}{2^4}$.

409. Se $(3{,}41)_8$ é a representação na base 8 de um certo número racional, determine sua representação decimal e sua representação binária.

410. Qual dos seguintes números racionais é o maior?

$$a = 4 + \frac{5}{7} + \frac{3}{7^2} + \frac{6}{7^3} + \frac{6}{7^4}$$

$$b = 4 + \frac{5}{7} + \frac{4}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4}$$

411. Ache $x, y \in \mathbb{N}^*$ de maneira que $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 0{,}3$ e a soma $x + y$ seja a maior possível. E para que $x + y$ seja a menor possível, como devem ser $x, y \in \mathbb{N}^*$?