5

Algumas Noções Topológicas

A Topologia é um ramo da Matemática no qual são estudadas, com grande generalidade, as noções de limite, de continuidade e as idéias com elas relacionadas. Neste capítulo, abordaremos alguns conceitos topológicos elementares referentes a subconjuntos de $\mathbb{R}$, visando estabelecer a base adequada para desenvolver os capítulos seguintes. Adotaremos uma linguagem geométrica, dizendo "ponto" em vez de "número real", "a reta" em vez de "o conjunto $\mathbb{R}$".

1 Conjuntos abertos

Diz-se que o ponto a é *interior* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando existe um número $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ está contido em X. O conjunto dos pontos interiores a X chama-se o *interior* do conjunto X e representa-se pela notação $\operatorname{int} X$. Quando $a \in \operatorname{int} X$ diz-se que o conjunto X é uma *vizinhança* do ponto a. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se *aberto* quando $A = \operatorname{int} A$, isto é, quando todos os pontos de A são interiores a A.

Exemplo 1. Todo ponto c do intervalo aberto (a, b) é um ponto interior a (a, b). Os pontos a e b, extremos do intervalo fechado $[a, b]$ não são interiores a $[a, b]$. O interior do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é vazio. Por outro lado, $\operatorname{int}[a, b] = (a, b)$. O intervalo fechado $[a, b]$ não é uma vizinhança de a nem de b. Um intervalo aberto é um conjunto aberto. O conjunto vazio é aberto. Todo intervalo aberto (limitado ou não) é um conjunto aberto.

O limite de uma seqüência pode ser reformulado em termos de conjuntos abertos: tem-se $a = \lim x_n$ se, e somente se, para todo aberto A contendo a existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in A$.

Teorema 1.

a) *Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos então a interseção $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto.*

b) *Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos abertos, a reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.*

Demonstração: a) Se $x \in A_1 \cap A_2$ então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Como A_1 e A_2 são abertos, existem $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ tais que $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A_1$ e $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset A_2$. Seja ε o menor dos dois números ε_1, ε_2. Então $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_1$ e $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_2$ logo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_1 \cap A_2$. Assim todo ponto $x \in A_1 \cap A_2$ é um ponto interior, ou seja, o conjunto $A_1 \cap A_2$ é aberto.

b) Se $x \in A$ então existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_\lambda \subset A$, logo todo ponto $x \in A$ é interior, isto é, A é aberto. □

Exemplo 2. Resulta imediatamente de a) no Teorema 1 que a interseção $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Mas, embora por b) a reunião de uma infinidade de conjuntos abertos seja ainda aberta, a interseção de um número infinito de abertos pode não ser aberta. Por exemplo, se $A_1 = (-1, 1)$, $A_2 = (-1/2, 1/2), \ldots, A_n = (-1/n, 1/n), \ldots$ então $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \{0\}$. Com efeito, se $x \neq 0$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| > 1/n$ logo $x \notin A_n$, donde $x \notin A$.

2 Conjuntos fechados

Diz-se que um ponto a é *aderente* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma seqüência de pontos $x_n \in X$. Evidentemente, todo ponto $a \in X$ é aderente a X: basta tomar $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Chama-se *fecho* de um conjunto X ao conjunto $\overline{X}$ formado por todos os pontos aderentes a X. Tem-se $X \subset \overline{X}$. Se $X \subset Y$ então $\overline{X} \subset \overline{Y}$. Um conjunto X diz-se *fechado* quando $X = \overline{X}$, isto é, quando todo ponto

aderente a X pertence a X. Seja $X \subset Y$. Diz-se que X é *denso* em Y quando $Y \subset \overline{X}$, isto é, quando todo $b \in Y$ é aderente a X. Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Teorema 2. *Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X.*

Demonstração: Seja a aderente a X. Então $a = \lim x_n$, onde $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada uma vizinhança qualquer $V \ni a$ temos $x_n \in V$ para todo n suficientemente grande (pela definição de limite), logo $V \cap X \neq \varnothing$. Reciprocamente, se toda vizinhança de a contém pontos de X podemos escolher, em cada intervalo $(a - 1/n, a + 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in X$. Então $|x_n - a| < 1/n$, logo $\lim x_n = a$ e a é aderente a X. □

Pelo teorema acima, a fim de que um ponto a não pertença a $\overline{X}$ é necessário e suficiente que exista uma vizinhança $V \ni a$ tal que $V \cap X = \varnothing$.

Corolário. *O fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado. (Ou seja, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ para todo $X \subset \mathbb{R}$.)*

Com efeito, se a é aderente a $\overline{X}$ então todo conjunto aberto A contendo a contém algum ponto $b \in \overline{X}$. A é uma vizinhança de b. Como b é aderente a X, segue-se que A contém algum ponto de X. Logo qualquer ponto a, aderente a $\overline{X}$, é também aderente a X, isto é, $a \in \overline{X}$. □

Teorema 3. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{R} - F$ é aberto.*

Demonstração: Sejam F fechado e $a \in A$, isto é, $a \notin F$. Pelo Teorema 2, existe alguma vizinhança $V \ni a$ que não contém pontos de F, isto é, $V \subset A$. Assim, todo ponto $a \in A$ é interior a A, ou seja, A é aberto. Reciprocamente, se o conjunto A é aberto e o ponto a é aderente a $F = \mathbb{R} - A$ então toda vizinhança de a contém pontos de F, logo a não é interior a A. Sendo A aberto, temos $a \notin A$, ou seja, $a \in F$. Assim, todo ponto a aderente a F pertence a F, logo F é fechado. □

Teorema 4.

a) *Se F_1 e F_2 são fechados então $F_1 \cup F_2$ é fechado.*

b) *Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados então a interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.*

Demonstração: a) Os conjuntos $A_1 = \mathbb{R} - F_1$ e $A_2 = \mathbb{R} - F_2$ são abertos, pelo Teorema 3. Logo, pelo Teorema 1, $A_1 \cap A_2 = \mathbb{R} - (F_1 \cup F_2)$ é aberto. Novamente pelo Teorema 3, $F_1 \cup F_2$ é fechado.

b) Para cada $\lambda \in L$, $A_\lambda = \mathbb{R} - F_\lambda$ é aberto. Segue-se que $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto. Mas $A = \mathbb{R} - F$. Logo F é fechado. □

Exemplo 3. Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado, não-vazio. Então $a = \inf X$ e $b = \sup X$ são aderentes a X. Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in X$ com $a \leq x_n < a + 1/n$, logo $a = \lim x_n$. Analogamente, vê-se que $b = \lim y_n$, $y_n \in X$. Em particular, a e b são aderentes a (a, b).

Exemplo 4. O fecho dos intervalos (a, b), $[a, b)$ e $(a, b]$ é o intervalo $[a, b]$. $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ e, para todo intervalo I, $\mathbb{Q} \cap I$ é denso em I. Uma reunião infinita de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado; com efeito, *todo* conjunto (fechado ou não) é reunião dos seus pontos, que são conjuntos fechados.

Uma *cisão* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma decomposição $X = A \cup B$ tal que $A \cap \overline{B} = \varnothing$ e $\overline{A} \cap B = \varnothing$, isto é, nenhum ponto de A é aderente a B e nenhum ponto de B é aderente a A. (Em particular, A e B são disjuntos.) A decomposição $X = X \cup \varnothing$ chama-se a *cisão trivial*.

Exemplo 5. Se $X = \mathbb{R} - \{0\}$, então $X = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$ é uma cisão. Dado um número irracional α, sejam $A = \{x \in \mathbb{Q}; x < \alpha\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q}; x > \alpha\}$. A decomposição $\mathbb{Q} = A \cup B$ é uma cisão do conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais. Por outro lado, se $a < c < b$, então $[a, b] = [a, c] \cup (c, b]$ não é uma cisão.

Teorema 5. *Um intervalo da reta só admite a cisão trivial.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que o intervalo I admita a cisão não trivial $I = A \cup B$. Tomemos $a \in A$, $b \in B$, digamos com $a < b$, logo $[a, b] \subset I$. Seja c o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Então $c \in A$ ou $c \in B$. Se $c \in A$, poremos $a_1 = c$, $b_1 = b$. Se $c \in B$, escreveremos $a_1 = a$, $b_1 = c$. Em qualquer caso, obteremos um intervalo $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, com $b_1 - a_1 = (b - a)/2$ e $a_1 \in A$, $b_1 \in B$. Por sua vez, o ponto médio de $[a_1, b_1]$ o decompõe em dois intervalos fechados justapostos de comprimento $(b - a)/4$. Um desses intervalos, que chamaremos $[a_2, b_2]$, tem $a_2 \in A$ e $b_2 \in B$. Prosseguindo analogamente, obteremos uma seqüência de intervalos encaixados $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ com $b_n - a_n = (b - a)/2^n$, $a_n \in A$ e $b_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 4, Capítulo 2, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq d \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O ponto $d \in I = A \cup B$ não pode estar em A pois $d = \lim b_n \in \overline{B}$, nem em B pois $d = \lim a_n \in \overline{A}$. Contradição. □

Corolário. *Os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente abertos e fechados são $\varnothing$ e $\mathbb{R}$.*

Com efeito, se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto e fechado, então $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R} - A)$ é uma cisão, logo $A = \varnothing$ e $\mathbb{R} - A = \mathbb{R}$ ou então $A = \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} - A = \varnothing$. □

3 Pontos de acumulação

Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é *ponto de acumulação* do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do próprio a. (Isto é, $V \cap (X - \{a\}) \neq \varnothing$.) Equivalentemente: para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \varnothing$. Indica-se com X' o conjunto dos pontos de acumulação de X. Portanto, $a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$. Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X, diz-se que a é um *ponto isolado* de X. Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que a é o único ponto de X no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Quando todos os pontos do conjunto X são isolados, X chama-se um conjunto *discreto*.

Teorema 6. *Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *a é um ponto de acumulação de X;*

(2) *a é limite de uma seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$;*

(3) *Todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X.*

Demonstração: Supondo (1), para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos achar um ponto $x_n \in X$, $x_n \neq a$, na vizinhança $(a - 1/n, a + 1/n)$. Logo $\lim x_n = a$, o que prova (2). Por outro lado, supondo (2), então, para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x_n; n > n_0\}$ é infinito porque do contrário existiria um termo x_{n_1} que se repetiria infinitas vezes e isto forneceria uma seqüência constante com limite $x_{n_1} \neq a$. Pela definição de limite, vê-se portanto que (2) $\Rightarrow$ (3). Finalmente, a implicação (3) $\Rightarrow$ (1) é óbvia. □

Exemplo 6. Se X é finito então $X' = \varnothing$ (conjunto finito não tem ponto de acumulação). $\mathbb{Z}$ é infinito mas todos os pontos de $\mathbb{Z}$ são isolados. $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Se $X = (a, b)$ então $X' = [a, b]$. Se $X = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ então $X' = \{0\}$, isto é, 0 é o único ponto de acumulação de X. Note que todos os pontos deste conjunto X são isolados (X é discreto).

Segue-se uma versão do Teorema de Bolzano-Weierstrass em termos de ponto de acumulação.

Teorema 7. *Todo conjunto infinito limitado de números reais admite pelo menos um ponto de acumulação.*

Demonstração: Seja $X \subset \mathbb{R}$ infinito limitado. X possui um subconjunto enumerável $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Fixando esta enumeração, temos uma seqüência (x_n) de termos dois a dois distintos, pertencentes a X, portanto uma seqüência limitada, a qual, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subseqüência convergente. Desprezando os termos que estão fora dessa subseqüência e mudando a notação, podemos admitir que (x_n) converge. Seja $a = \lim x_n$. Como os termos x_n são todos distintos, no máximo um deles pode ser igual a a. Descartando-o, caso exista, teremos a como limite de uma seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$, logo $a \in X'$. □

4 Conjuntos compactos

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se *compacto* quando é limitado e fechado.

Todo conjunto finito é compacto. Um intervalo do tipo $[a, b]$ é um conjunto compacto. Por outro lado, (a, b) é limitado mas não é fechado, logo não é compacto. Também $\mathbb{Z}$ não é compacto pois é ilimitado, embora seja fechado (seu complementar $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ é a reunião dos intervalos abertos $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, logo é um conjunto aberto).

Teorema 8. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda seqüência de pontos em X possui uma subseqüência que converge para um ponto de X.*

Demonstração: Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, toda seqüência de pontos de X é limitada, logo (por Bolzano-Weierstrass) possui uma subseqüência convergente, cujo limite é um ponto de X (pois X é fechado). Reciprocamente, seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que toda seqüência de pontos $x_n \in X$ possui uma subseqüência que converge para um ponto de X. Então X é limitado porque, do contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$ poderíamos encontrar $x_n \in X$ com $|x_n| > n$. A seqüência (x_n), assim obtida, não possuiria subseqüência limitada, logo não teria subseqüência convergente. Além disso, X é fechado pois do contrário existiria um ponto $a \notin X$ com $a = \lim x_n$, onde cada $x_n \in X$. A seqüência (x_n) não possuiria então subseqüência alguma convergindo para um ponto de X pois todas suas subseqüências teriam limite a. Logo X é compacto. □

Observação. Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então, pelo Exemplo 3, $a = \inf X$ e $b = \sup X$ pertencem a X. Assim, todo conjunto compacto contém um elemento mínimo e um elemento máximo. Ou seja, X compacto $\Rightarrow \exists\, x_0, x_1 \in X$ tais que $x_0 \leq x \leq x_1$ para todo $x \in X$.

O teorema a seguir generaliza o princípio dos intervalos encaixados.

Teorema 9. *Dada uma seqüência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ de conjuntos compactos não-vazios, existe (pelo menos) um número real que pertence a todo os X_n.*

Demonstração: Definamos uma seqüência (x_n) escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in X_n$. Esta seqüência está no compacto X_1, logo possui uma subseqüência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ convergindo para um ponto $a \in X_1$. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos $x_{n_k} \in X_n$ sempre que $n_k > n$. Como X_n é compacto, segue-se que $a \in X_n$. Isto prova o teorema. □

Encerraremos nosso estudo dos conjuntos compactos da reta com a demonstração do teorema de Borel-Lebesgue.

Chama-se *cobertura* de um conjunto X a uma família $\mathcal{C}$ de conjuntos C_λ cuja reunião contém X. A condição $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ significa que, para cada $x \in X$, deve existir (pelo menos) um $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$. Quando todos os conjuntos C_λ são abertos, diz-se que $\mathcal{C}$ é uma *cobertura aberta*. Quando $L = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ é um conjunto finito, diz-se que $X \subset C_{\lambda_1} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n}$ é uma *cobertura finita*. Se $L' \subset L$ é tal que ainda se tem $X \subset \bigcup_{\lambda' \in L'} C_{\lambda'}$, diz-se que $\mathcal{C}' = (C_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}$ é uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$.

Teorema 10. (Borel-Lebesgue.) *Toda cobertura aberta de um conjunto compacto possui uma subcobertura finita.*

Demonstração: Tomemos inicialmente uma cobertura aberta $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ do intervalo compacto $[a, b]$. Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{C} = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$ não admita subcobertura finita. O ponto médio do intervalo $[a, b]$ o decompõe em dois intervalos de comprimento $(b-a)/2$. Pelo menos um destes intervalos, o qual chamaremos $[a_1, b_1]$, não pode ser coberto por um número finito de conjuntos A_λ. Por bisseções sucessivas obteremos uma seqüência decrescente $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ de intervalos tais que $b_n - a_n = (b-a)/2^n$ e nenhum $[a_n, b_n]$ pode estar contido numa reunião finita dos abertos A_λ. Pelo Teorema 4, Capítulo 2, existe um número real c que pertence a todos os intervalos $[a_n, b_n]$. Em particular, $c \in [a, b]$. Pela definição de cobertura, existe $\lambda \in L$ tal que $c \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, temos $[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset A_\lambda$ para um certo $\varepsilon > 0$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $(b-a)/2^n < \varepsilon$ temos então $c \in [a_n, b_n] \subset [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, donde $[a_n, b_n] \subset A_\lambda$, logo $[a_n, b_n]$ pode ser coberto por apenas um dos conjuntos A_λ. Contradição. No caso geral, temos uma cobertura aberta $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ do compacto X. Tomamos um intervalo compacto $[a, b]$ que contenha X e, acrescentando aos A_λ o novo aberto $A_{\lambda_0} = \mathbb{R} - X$, obtemos uma cobertura aberta de $[a, b]$, da qual extraímos, pela parte já provada, uma subcobertura finita $[a, b] \subset A_{\lambda_0} \cup A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$. Como nenhum ponto de X pode pertencer a A_{λ_0}, temos $X \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$ e isto completa a demonstração. $\square$

Exemplo 7. Os intervalos $A_n = (1/n, 2)$, $n \in \mathbb{N}$, constituem uma cobertura aberta do conjunto $X = (0, 1]$ pois $(0, 1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Entretanto, esta cobertura não possui subcobertura finita pois, como $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$, toda reunião finita de conjuntos A_n é igual àquele de maior índice, logo não contém $(0, 1]$.

O Teorema de Borel-Lebesgue, cuja importância é inestimável, será utilizado neste livro uma só vez, no Capítulo 10, seção 4. (V. Teorema 7 daquele capítulo.) Pode-se provar, reciprocamente, que se toda cobertura aberta de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ possui uma subcobertura finita então X é limitado e fechado. (Cfr. "Curso de Análise", vol. 1, pag. 182.)

5 O conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor, que descreveremos agora, tem as seguintes propriedades:

1) É compacto.
2) Tem interior vazio (não contém intervalos).
3) Não contém pontos isolados (todos seus pontos são pontos de acumulação).
4) É não-enumerável.

O *conjunto de Cantor* K é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1]$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo. Retira-se do intervalo $[0, 1]$ seu terço médio aberto $(1/3, 2/3)$. Depois retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$. Sobra então $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um desses quatro intervalos. Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor.

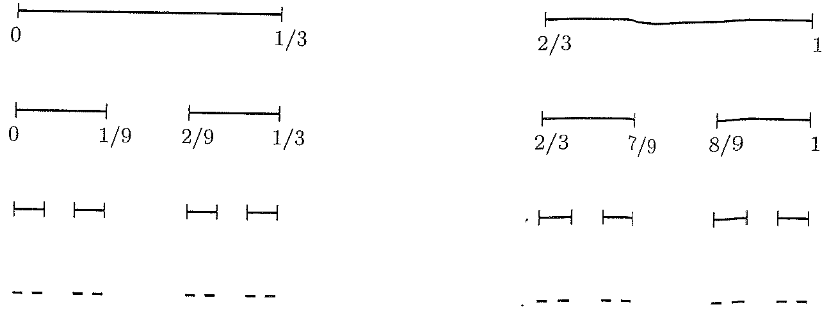

Figura 1: Construindo o conjunto de Cantor.

Se indicarmos com $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ os intervalos abertos omitidos, veremos que $F = \mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ é um conjunto fechado logo $K = [0, 1] \cap F$ é limitado e fechado, ou seja, o conjunto de Cantor é compacto.

Para mostrar que K tem interior vazio, observamos que depois da n-ésima etapa de sua construção restam apenas intervalos de comprimento $1/3^n$. Portanto, dado qualquer intervalo $J \subset [0, 1]$ de comprimento $c > 0$, se tomarmos n tal que $1/3^n < c$, o intervalo J estará mutilado depois da n-ésima etapa da formação de K. Assim, K não contém intervalos.

Os pontos extremos dos intervalos omitidos nas diversas etapas da construção do conjunto de Cantor, tais como $1/3$, $2/3$, $1/9$, $2/9$, $7/9$, $8/9$, etc, pertencem a K, pois em cada etapa são retirados apenas pontos interiores aos intervalos que restaram na etapa anterior. Eles constituem um conjunto enumerável E, sem pontos isolados. Com efeito, seja $c \in K$ extremidade de algum intervalo, digamos (c, b), omitido de $[0, 1]$ para formar K. Quando (c, b) foi retirado, restou um certo intervalo $[a, c]$. Nas etapas seguintes da construção de K, restarão sempre terços finais de intervalo, do tipo $[a_n, c]$, com $a_n \in E$. O comprimento $c - a_n$ tende a zero, logo $a_n \to c$ e assim c não é ponto isolado de E.

Suponhamos agora que $c \in K$ não seja extremo de intervalo retirado de $[0, 1]$ durante a construção de K. (Até agora, não sabemos se de fato tais pontos existem, mas veremos logo mais que eles constituem a maioria dos pontos de K.) Provemos que c não é isolado em K. Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$, c pertence ao interior de um intervalo

$[x_n, y_n]$ que restou depois da n-ésima etapa da construção de K. Temos $x_n < c < y_n$ com $x_n, y_n \in K$ e $y_n - x_n = 1/3^n$. Logo $c = \lim x_n = \lim y_n$ é ponto de acumulação de K.

Fica então constatado que K não possui pontos isolados.

Provaremos agora que o conjunto de Cantor K não é enumerável. Dado qualquer subconjunto enumerável $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset K$, obteremos um ponto $c \in K$ tal que $c \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para isso, com centro num ponto de K, tomamos um intervalo compacto não-degenerado I_1 tal que $x_1 \notin I_1$. Como nenhum ponto de K é isolado, $I_1 \cap K$ é um conjunto infinito, compacto sem pontos isolados. Em seguida, com centro em algum ponto de K interior a I_1, tomamos um intervalo compacto não-degenerado $I_2 \subset I_1$ tal que $x_2 \notin I_2$. Prosseguindo analogamente, obtemos uma seqüência decrescente de intervalos compactos $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ tais que $x_n \notin I_n$ e $I_n \cap K \neq \varnothing$. Sem perda de generalidade, podemos supor que I_n tem comprimento $< 1/n$. Então o ponto c, pertencente a todos os I_n (cuja existência é garantida pelo Teorema 4 do Capítulo 2) é único, isto é, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$. Escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$ um ponto $y_n \in I_n \cap K$, teremos então $|y_n - c| \leq 1/n$, donde $\lim y_n = c$. Como K é fechado, segue-se que $c \in K$. Por outro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $c \in I_n$, logo $c \neq x_n$, concluindo a demonstração.

Os pontos do conjunto de Cantor têm uma caracterização interessante e útil em termos de sua representação em base 3. Dado $x \in [0,1]$, representar x na base 3 significa escrever $x = 0, x_1x_2x_3\ldots$, onde cada um dos dígitos x_n é igual a 0, 1 ou 2, de tal modo que

$$x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \cdots + \frac{x_n}{3^n} + \cdots.$$

A fim de que se tenha $x = 0, x_1x_2\ldots x_n000\ldots$ é necessário e suficiente que x seja um número da forma $m/3^n$, com m, n inteiros e $m \leq 3^n$. Por exemplo $17/27 = 0,122000\ldots$ na base 3. Quando o denominador da fração irredutível p/q não é uma potência de 3 então a representação de p/q na base 3 é periódica. Por exemplo, $1/4 = 0,020202\ldots$ e $1/7 = 0,010212010212\ldots$ na base 3. Os números irracionais têm representação não-periódica.

Na primeira etapa da formação do conjunto de Cantor, ao retirar-se o intervalo aberto $(1/3, 2/3)$ ficam excluídos os números $x \in [0,1]$ cuja representação na base 3 tem $x_1 = 1$, com a única exceção de $1/3 = 0{,}1$, que permanece. Na segunda etapa, foram excluídos os números dos intervalos $(1/9, 2/9)$ e $(7/9, 8/9)$ ou seja, aqueles da forma $0,01x_3x_4\ldots$ ou da forma $0,21x_3x_4\ldots$ (com exceção de $1/9 = 0,01$ e de $7/9 = 0,21$, que permanecem). De um modo geral, podemos afirmar que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo $[0,1]$ cuja representação $x = 0, x_1x_2\ldots x_n\ldots$ na base 3 só contém os algarismos 0 e 2, com exceção daqueles que contêm um único algarismo 1 como algarismo significativo final, como $x = 0,20221$, por exemplo. Se observarmos que $0,0222\cdots = 0,1$ poderemos sempre substituir o algarismo final 1 pela seqüência $0222\ldots$. Por exemplo: $0,20201 = 0,20200222\ldots$. Com esta convenção, pode-se afirmar, sem exceções, que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo $[0,1]$ cuja representação na base 3 só contém os algarismos 0 e 2.

Daí resulta facilmente que o conjunto de Cantor é não-enumerável (vide Exemplo 3, Capítulo 1) e que $1/4 = 0,0202\ldots$ pertence ao conjunto de Cantor.

6 Exercícios

Seção 1: Conjuntos abertos

1. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$ tem-se $\operatorname{int}(\operatorname{int} X) = \operatorname{int} X$ e conclua que $\operatorname{int} X$ é um conjunto aberto.

2. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto com a seguinte propriedade: "toda seqüência (x_n) que converge para um ponto $a \in A$ tem seus termos x_n pertencentes a A para todo n suficientemente grande". Prove que A é aberto.

3. Prove que $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$ e $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$ quaisquer que sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Se $A = (0,1]$ e $B = [1,2)$, mostre que $\operatorname{int}(A \cup B) \neq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$.

4. Para todo $X \subset \mathbb{R}$, prove que vale a reunião disjunta $\mathbb{R} = \operatorname{int} X \cup \operatorname{int}(\mathbb{R} - X) \cup F$, onde F é formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R} - X$. O conjunto $F = \operatorname{fr} X$ chama-se a *fronteira* de X. Prove que $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, $A \cap \operatorname{fr} A = \varnothing$.

5. Para cada um dos conjuntos seguintes, determine sua fronteira: $X = [0,1]$, $Y = (0,1) \cup (1,2)$, $Z = \mathbb{Q}$, $W = \mathbb{Z}$.

6. Sejam $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ intervalos limitados dois a dois distintos, cuja interseção $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ não é vazia. Prove que I é um intervalo, o qual nunca é aberto.

Seção 2: Conjuntos fechados

1. Sejam I um intervalo não-degenerado e $k > 1$ um número natural. Prove que o conjunto dos números racionais m/k^n pertencentes a I, cujos denominadores são potências de k com expoente $n \in \mathbb{N}$, é denso em I.
2. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, vale $\overline{X} = X \cup \operatorname{fr} X$. Conclua que X é fechado se, e somente se, $X \supset \operatorname{fr} X$.
3. Para todo $X \subset \mathbb{R}$, prove que $\mathbb{R} - \operatorname{int} X = \overline{\mathbb{R} - X}$ e $\mathbb{R} - \overline{X} = \operatorname{int}(\mathbb{R} - X)$.
4. Se $X \subset \mathbb{R}$ é aberto (respectivamente, fechado) e $X = A \cup B$ é uma cisão, prove que A e B são abertos (respectivamente, fechados).
5. Prove que se $X \subset \mathbb{R}$ tem fronteira vazia então $X = \varnothing$ ou $X = \mathbb{R}$.
6. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Prove que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e que $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê exemplo em que $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$.
7. Dada uma seqüência (x_n), prove que o fecho do conjunto $X = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é $\overline{X} = X \cup A$, onde A é o conjunto dos valores de aderência de (x_n).

Seção 3: Pontos de acumulação

1. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $\overline{X} = X \cup X'$. Conclua que X é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.
2. Prove que toda coleção de intervalos não-degenerados dois a dois disjuntos é enumerável.
3. Prove que se todos os pontos do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ são isolados então pode-se escolher, para cada $x \in X$, um intervalo aberto I_x, de centro x, tal que $x \neq y \Rightarrow I_x \cap I_y = \varnothing$.
4. Prove que todo conjunto não-enumerável $X \subset \mathbb{R}$ possui algum ponto de acumulação $a \in X$.
5. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, X' é um conjunto fechado.

6. Seja a um ponto de acumulação do conjunto X. Prove que existe uma seqüência crescente ou uma seqüência decrescente de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.

Seção 4: Conjuntos compactos

1. Prove que o conjunto A dos valores de aderência de uma seqüência (x_n) é fechado. Se a seqüência for limitada, A é compacto, logo existem l e L, respectivamente o menor e o maior valor de aderência da seqüência limitada (x_n). Costuma-se escrever $l = \liminf x_n$ e $L = \limsup x_n$.
2. Prove que uma reunião finita e uma interseção arbitrária de conjuntos compactos é um conjunto compacto.
3. Dê exemplo de uma seqüência decrescente de conjuntos fechados não-vazios $F_1 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ e uma seqüência decrescente de conjuntos limitados não-vazios $L_1 \supset \cdots \supset L_n \supset \cdots$ tais que $\cap F_n = \varnothing$ e $\cap L_n = \varnothing$.
4. Sejam X, Y conjuntos não-vazios, com X compacto e Y fechado. Prove que existem $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ tais que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$ para quaisquer $x \in X$, $y \in Y$.
5. Um conjunto compacto cujos pontos são todos isolados é finito. Dê exemplo de um conjunto fechado ilimitado X e um conjunto limitado não-fechado Y, cujos pontos são todos isolados.
6. Prove que se X é compacto então os seguintes conjuntos também são compactos:

   a) $S = \{x + y;\ x, y \in X\}$;

   b) $D = \{x - y;\ x, y \in X\}$;

   c) $P = \{x \cdot y;\ x, y \in X\}$;

   d) $Q = \{x/y;\ x, y \in X\}$ se $0 \notin X$.

Seção 5: O conjunto de Cantor

1. Determine quais dentre os números $1/m$, $2 \leq m \leq 10$, pertencem ao conjunto de Cantor.
2. Dado arbitrariamente $a \in (0, 1]$, prove que existem $x < y$ pertencentes ao conjunto de Cantor, tais que $y - x = a$.

3. Prove que a soma da série cujos termos são os comprimentos dos intervalos omitidos para formar o conjunto de Cantor é igual a 1.
4. Prove que os extremos dos intervalos removidos formam um subconjunto enumerável denso no conjunto de Cantor.