As propriedades relacionadas no teorema seguinte são de fácil demonstração e ficam para os exercícios.

**2.16. Teorema.** *a)* $a_n \to +\infty \Leftrightarrow -a_n \to -\infty$.

*b) Seja* $(a_n)$ *uma seqüência não limitada. Sendo não decrescente, ela tende a* $+\infty$*; e sendo não crescente, ela tende a* $-\infty$.

*c) Se* $\lim a_n = \pm\infty$, *então* $1/a_n$ *tende a zero.* $\forall n > N$

*d) Se* $\lim a_n = 0$, *então* $1/a_n$ *tende a* $+\infty$ *se* $a_n > 0$ *e tende a* $-\infty$ *se* $a_n < 0$. $\forall n > N$

*e) Se* $(b_n)$ *é uma seqüência limitada e* $a_n \to +\infty$ *ou a* $-\infty$, *então a seqüência* $(a_n + b_n)$ *tende a* $+\infty$ *ou a* $-\infty$ *respectivamente.*

*f) Se* $a_n \to +\infty$ *e* $b_n \geq c$ *onde* $c$ *é um número positivo, então* $a_nb_n \to +\infty$. *(Em particular,* $a_n \to +\infty$ *e* $b_n \to +\infty \Rightarrow a_nb_n \to +\infty$.*) Formule e demonstre as outras possibilidades:* $a_n \to +\infty$ *e* $b_n \leq c < 0$, $a_n \to -\infty$ *e* $b_n \geq c > 0$, $a_n \to -\infty$ *e* $b_n \leq c < 0$.

*g) Se* $a_n \to +\infty$ *e* $a_n \leq b_n$, *então* $b_n \to +\infty$.

**2.17. Exemplo.** A seqüência $a^n$, com $a > 1$, tende a infinito. De fato, $0 < 1/a < 1$, de forma que, pelo Exerc. 14 da p. 24, $(1/a)^n = 1/a^n$ tende a zero; logo, pelo item d) do teorema anterior, $a^n \to \infty$.

Podemos também raciocinar assim: $a = 1 + h$, onde $h > 0$. Então $a^n = (1+h)^n > 1 + nh > nh > k \Leftrightarrow n > k/h$.

Outro modo de tratar esse limite faz uso do logaritmo, assim:

$$a^n > k \Leftrightarrow n \log a > \log k \Leftrightarrow n > \frac{\log k}{\log a}$$

Outra maneira ainda apóia-se na igualdade $a^n = e^{(\log a)n}$, pressupondo o conhecimento da função exponencial e de suas propriedades; em particular, a propriedade segundo a qual $e^{(\log a)x}$ tende a infinito com $x \to \infty$. Como a seqüência em pauta é uma restrição dessa função ao dominio dos números naturais, é claro que ela também tende a infinito.

**2.18. Exemplo.** A seqüência $a_n = n^k$, onde $k$ é um inteiro positivo, tende a infinito por ser o produto de $k$ fatores que tendem a infinito. No entanto, ela tende a infinito "mais devagar" do que $a^n$ ($a > 1$, evidendentemente). Podemos ver isso considerando a razão $r_n = n^k/a^n$ como restrição da função

$$f(x) = \frac{x^k}{a^x} = \frac{x^k}{e^{(\log a)x}},$$

a qual, como sabemos do Cálculo, tende a zero com $x \to \infty$. Concluímos assim que $r_n$ tende a zero, e é isso o significado preciso de dizer que o numerador $n^k$ tende a infinito "mais devagar" do que $a^n$.

Outro modo de tratar a mesma questão baseia-se na propriedade do Exerc. ~~8~~ 10 adiante. Para isso basta observar que

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \to \frac{1}{a} < 1.$$

**2.19. Exemplo.** Mostraremos agora que a seqüência $a^n$, com $a > 1$, tende a infinito mais devagar que $n!$ Para isso, notamos que, sendo $n > N$,

$$\frac{a^n}{n!} = \underbrace{\left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N}\right)}_{N}\underbrace{\left(\frac{a}{N+1}\cdot\frac{a}{N+2}\cdots\frac{a}{n}\right)}_{n-N}.$$

Fixando $N$ tal que $a/N < 1/2$, cada um dos $n-N$ fatores do segundo parênteses será inferior a $1/2$, logo,

$$\frac{a^n}{n!} < \left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N}\right)2^{N-n} = 2^{-n}c,$$

onde $c = (2a)^N/N!$ é uma constante que só depende de $N$, que já está fixado. Essa desigualdade prova então que a razão de $a^n$ para $n!$ tende a zero, significando que a primeira dessas seqüências tende a infinito mais devagar que a segunda.

**2.20. Exemplo.** Provemos finalmente que a seqüência $n!$ é ainda mais vagarosa que $n^n$. De fato, basta notar que

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n} < \frac{1}{n} \to 0.$$

Em vista dos três últimos exemplos acima, vemos que (sendo $a > 1$),

$$\lim\frac{n^k}{a^n} = 0;\quad \lim\frac{a^n}{n!} = 0;\quad \lim\frac{n!}{n^n} = 0. \tag{2.10}$$

Na linguagem sugestiva que vimos usando, isso significa que, embora as quatro seqüências $n^k$, $a^n$, $n!$ e $n^n$ tendam todas a infinito, cada uma tende a infinito mais devagar do que a seguinte.

## Seqüências recorrentes

Freqüentemente o termo geral de uma seqüência é definido por uma função de um ou mais de seus termos precedentes. A seqüência se chama, então, apropriadamente, *indutiva* ou *recorrente*. Veremos a seguir um exemplo interessante de seqüência recorrente. Outros exemplos são dados nos exercícios.

**Exemplo 2.21.** Consideramos aqui uma seqüência que tem origem num método de extração da raiz quadrada, aparentemente já conhecido na

Mesopotâmia de 18 séculos antes de Cristo! Dado um número positivo qualquer $N$, deseja-se achar um número $a$ tal que $a \cdot a = N$. Acontece que, em geral, não dispomos do valor exato da raiz, e o número $a$ é apenas um valor aproximado. Sendo assim, o fator que deve multiplicar $a$ para produzir $N$ não é necessariamente $a$, mas sim o número $N/a$. Então, em vez de $a \cdot a = N$, temos

$$a \cdot \frac{N}{a} = N.$$

Vemos, nesse produto, que se o fator $a$ aumenta, o fator $N/a$ diminui; e se $a$ diminui, $N/a$ aumenta. O valor desejado de $a$ é aquele que faz com que ele seja igual a $N/a$, quando será a raiz quadrada exata de $N$. Em geral, sendo $a$ uma raiz aproximada por falta, $N/a$ será raiz aproximada por excesso e vice-versa, de sorte que a raiz exata está compreendida entre um e outro desses fatores. Daí a idéia de tomar a média aritmética deles, isto é,

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right),$$

como um valor que talvez seja melhor aproximação de $\sqrt{N}$ do que o valor original $a$. Segundo esse argumento, é de se esperar que

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{N}{a_1}\right)$$

seja melhor aproximação ainda. Prosseguindo dessa maneira, construímos a seqüência *recorrente*

$$a_0 = a; \quad a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{N}{a_{n-1}}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

É notável que essa seqüência, cujas origens datam de tão alta antigüidade, seja talvez o mais eficiente método de extração da raiz quadrada, como se prova com relativa facilidade. (Veja o Exerc. 20 adiante.)

## Exercícios

1. Seja $(a_n)$ uma seqüência monótona que possui uma subseqüência convergindo para um limite $L$. Prove que $(a_n)$ também converge para $L$.

2. Prove que toda seqüência monótona convergente é limitada.

3. Sejam $N_1$ e $N_2$ subconjuntos infinitos e disjuntos do conjunto dos números naturais $\mathbf{N}$, cuja união é o próprio $\mathbf{N}$. Seja $(a_n)$ uma seqüência cujas restrições a $N_1$ e $N_2$ convergem para o mesmo limite $L$. Prove que $(a_n)$ converge para $L$.

4. Construa uma seqüência que tenha uma subseqüência convergindo para $-3$ e outra convergindo para 8.

5. Construa uma seqqüência que tenha três subseqüências convergindo, cada uma para cada um dos números 3, 4, 5.

6. Generalize o exercício anterior: dados os números $L_1, L_2, \ldots, L_k$, distintos entre si, construa uma seqüência que tenha $k$ subseqüências, cada uma convergindo para cada um desses números.

7. Construa uma seqüência que tenha subseqüências convergindo, cada uma para cada um dos números inteiros positivos.

8. Construa uma seqüência que tenha subseqüências convergindo, cada uma para cada um dos números reais.

9. Prove que se $a_n > 0$ e $a_{n+1}/a_n \leq c$, onde $c < 1$, então $a_n \to 0$.

10. Prove que se $a_n > 0$ e $a_{n+1}/a_n \to c$, onde $c < 1$, então $a_n \to 0$.

11. Demonstre o teorema 2.16.

12. Prove que se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L > 0$, então $a_n b_n rig + \infty$. Examine também as demais combinações de $a_n \to \pm\infty$ com $L$ positivo ou negativo.

13. Prove que $5n^3 - 4n^2 + 7$ tende a infinito.

14. Prove que um polinômio $p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ tende a $\pm\infty$ conforme seja $a_k$ positivo ou negativo respectivamente.

15. Seja $p(n)$ como no exercício anterior, com $a_k > 0$. Mostre que $\sqrt[n]{p(n)} \to 1$.

16. Mostre que $\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n+h} \to \infty$.

17. Mostre que $\sqrt[n]{n!} \to \infty$.

18. Considere a seqüência assim definida: $a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ para $n > 1$. Escreva explicitamente os primeiros quatro ou cinco termos dessa seqüência. Prove que ela é uma seqüência convergente e calcule seu limite.

19. Generalize o exercício anterior considerando a seqüência $a_1 = \sqrt{a}$, $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$, onde $a > 0$.

20. Dado um número $N > 0$ e fixado um número qualquer $a_0 = a$, seja $a_n = (a_{n-1} + N/a_{n-1})/2$ para $n > 1$. Prove que, a excessão, eventualmente, de $a_0$, essa seqüência é decrescente. Prove que ela aproxima $\sqrt{N}$ e dê uma estimativa do erro que se comete ao se tomar $a_n$ como aproximação de $\sqrt{N}$.

21. Prove que a seqüência anterior é exatamente a mesma que se obtém com a aplicação do método de Newton para achar a raiz aproximada de $x^2 - N = 0$.

22. **(Divisão áurea).** Já vimos (p. 23) que um ponto $A_1$ de um segmento $OA$ efetua a divisão áurea desse segmento se $OA/OA_1 = OA_1/A_1A$. Vimos também que o número $\phi$, raiz positiva de $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ $[= (\sqrt{5}+1)/2 \approx 1,618]$, é chamado a *razão áurea*. Considere um eixo de coordenadas com origem $O$, $a_0 = 1$ a abscissa de $A$ $(= A_0)$ e $a_1 = \varphi$ a abscissa de $A_1$. Construa a seqüência de pontos $A_n$ com abscissa $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$, $n \geq 2$. Prove, como já anunciamos na p. 24, que $A_n$ efetua a divisão áurea do segmento $OA_{n-1}$ e que $a_n \to 0$. Observe que os pares $(a_0, a_1)$, $(a_1, a_2)$, $(a_2, a_3)$, etc., são os lados de retângulos áureos, como na construção de uma infinidade de retângulos áureos da p. 23. Escreva os primeiros dez termos da seqüência $a_n$.

23. **(Seqüência de Fibonacci).**[1] Defina $f_n$ indutivamente assim: $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$. Escreva os primeiros dez elementos dessa seqüência e observe que, pelo menos

[1]Veja a explicação da origem dessa seqüência em nosso artigo na RPM 6 ou no artigo do Prof. Alberto Azevedo na RPM 45.

para os primeiros valores de $n$, vale a relação: $a_n = (-1)^n(f_{n-2} - \varphi f_{n-1})$, onde $a_n$ é a seqüência do exercício anterior. Prove, por indução, que essa relação é válida para todo $n \geq 2$. Prove que a seqüência $x_n = f_n/f_{n+1}$ é convergente e seu limite é a razão áurea.

## Sugestões e soluções

4. A seqüência $a_{2n} = -3$ e $a_{2n+1} = 8$ resolve. Construa outro exemplo.

5. Dado $n \in \mathbf{N}$, seja $r_n$ o resto de sua divisão por 3. Verifique que $a_n = r_n$ resolve o problema.

6. Seja $r_n$ o resto da divisão de $n$ por $k$. $a_n = L_{r_n}$ resolve; explique por quê.

7. Construa a seqüência assim: 1; depois 1, 2; depois 1, 2, 3; depois 1, 2, 3, 4; e assim por diante, de forma que a seqüência é: 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4,... Outro modo: decomponha o conjunto dos números naturais $\mathbf{N}$ numa união de conjuntos infinitos e disjuntos $N_1, N_2, \ldots$ Por exemplo. $N_1$ pode ser o conjunto dos números ímpares, $N_2 = 2N_1$, $N_3 = 2^2N_1, \ldots$; e, em geral, $N_n = 2^{n-1}N_1$. Verifique que esses $N_n$ são realmente disjuntos e todo número natural está em um deles. Em seguida defina a seqüência assim: $a_n = m$ se $n \in N_m$. Outro modo: considere uma seqüência $r_1, r_2, r_3, \ldots$, obtida por enumeração de todos os números racionais. Observe que este exemplo também responde às exigências dos Exercs. 4 a 6. Observe também que as soluções dadas naqueles exercícios resultavam em subseqüências constantes, ao passo que os termos de $r_n$ são todos diferentes entre si.

8. A seqüência $(r_n)$ do exercício anterior resolve. Outra solução, ainda com a notação do exercício anterior: defina $a_n = r_m$ se $n \in N_m$.

10. Utilize o Teorema 2.6, tomando, por exemplo, $\boxed{B = c + (1-c)/2.}$

14. Observe que $p(n) = a_k n^k(1 + \ldots) = a_k n^k b_n$, onde $b_n$ é a expressão entre parênteses, que tende a 1.

17. Observe que $\sqrt[n]{n!} > K \Leftrightarrow n! > K^n$. Agora lembre-se de que $n!$ tende a infinito mais depressa do que $K^n$, qualquer que seja $K$.

18. Supondo por um momento que $(a_n)$ convirja para um certo $L$, passamos ao limite em $a_n^2 = 2 + a_{n-1}$, resolvemos a equação resultante e achamos $L = 2$. (Mas *é preciso* provar a existência do limite! Veja este exemplo: a seqüência 1, 3, 7, 15, 31,...; em geral, $a_n = 2a_{n-1} + 1$, evidentemente não converge, logo, não podemos simplesmente passar ao limite nessa última igualdade para obter $L = 2L + 1$, ou $L = -1$.) Prove que a seqüência dada é crescente e limitada superiormente por 2.

19. Seja $b = \max\{a, \sqrt{a}, 2\}$. Claramente, $a_1 \leq b$ e, supondo $a_n \leq b$, teremos $a_{n+1} \leq \sqrt{a+b} \leq \sqrt{2b} \leq 2b$. Isso prova que a seqüência é limitada superiormente. Prova-se também que ela é crescente, notando que $a_2 > a_1$ e que, supondo $a_n > a_{n-1}$, então $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} > \sqrt{a + a_{n-1}} = a_n$. Agora é só passar ao limite na fórmula de definição e achar a raiz positiva de $L^2 = a + L$, isto é, $L = (1 + \sqrt{1+4a})/2$.

20. Por um cálculo simples, $a_1 - \sqrt{N} = (a - \sqrt{N})^2/2a$. Isto prova que $a_1 > \sqrt{N}$ (mesmo que $a < \sqrt{N}$). Além disso, se $a > \sqrt{N}$,

$$a_1 - \sqrt{N} = \frac{(a-\sqrt{N})^2}{2a} = \frac{a-\sqrt{N}}{2a}(a-\sqrt{N}) < \frac{1}{2}(a-\sqrt{N}) < a - \sqrt{N},$$

mostrando que $\sqrt{N} < a_1 < a$. Com o mesmo tipo de raciocinio, mesmo que $a$ seja menor do que $\sqrt{N}$, prova-se que $\sqrt{N} < a_{n+1} < a_n < \ldots < a_1$ e que

$$0 < a_{n+1} - \sqrt{N} < \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{N}) < \ldots < \frac{a_1 - \sqrt{N}}{2^n}.$$

22. Das definições dadas segue-se que

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 - a_2}{a_0 - a_1}, \text{ donde } \frac{OA_2}{OA_1} = \frac{A_2A_1}{OA_2},$$

mostrando que $A_2$ divide $OA_1$ na razão áurea. Com raciocinio análogo prova-se, por indução, que $A_n$ divide $0A_{n-1}$ na razão áurea.

Para provar que $a_n \to 0$, prove que

$$\varphi = \frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

e conclua que $a_n = \varphi^n$.

23. Como já observamos, a relação $a_n = (-1)^n(f_{n-2} - \varphi f_{n-1})$ é válida para os primeiros valores de $n$; na verdade, basta saber que vale para $n = 2$. Vamos provar que se ela valer para $n = 2, 3, \ldots, k$, ela deve valer para $n = k + 1$. Por definição, $a_{k+1} = a_{k-1} - a_k$; e como a relação que desejamos provar vale para $n = 2, 3, \ldots, k$, temos:

$$a_{k+1} = a_{k-1} - a_k = (-1)^{k-1}(f_{k-3} - \varphi f_{k-2}) - (-1)^k(f_{k-2} - \varphi f_{k-1});$$

mas $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$ e $(-1)^k = -(-1)^{k+1}$, de forma que

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (-1)^{k+1}(f_{k-3} - \varphi f_{k-2} + f_{k-2} - \varphi f_{k-1}) \\ &= (-1)^{k+1}[f_{k-3} + f_{k-2} - \varphi(f_{k-2} + f_{k-1})] \\ &= (-1)^{k+1}(f_{k-1} - \varphi f_k), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. A parte final do exercício fica por conta do leitor.

## Intervalos encaixados

Veremos, a seguir, uma importante conseqüência da propriedade do supremo.

**2.22. Teorema dos intervalos encaixados.** *Seja $I_n = [a_n, b_n], n = 1, 2, \ldots$, uma família de intervalos fechados e encaixados, isto é, $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$. Então existe pelo menos um número $c$ pertencendo a todos os intervalos $I_n$ (ou, o que é o mesmo, $c \in I_n \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n \cap \ldots$). Se, além das hipóteses feitas, o comprimento $|I_n| = b_n - a_n$ do $n$-ésimo intervalo tender a zero, então o número $c$ será único, isto é, $I_1 \cap I_2 \cap \ldots I_n \cap \ldots = \{c\}$.*

*Demonstração.* É claro que as seqüências $(a_n)$ e $(b_n)$ são, respectivamente. não decrescente e não crescente. Além disso, como

$$a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1,$$

vemos que $(a_n)$ é limitada à direita por $b_1$ e $(b_n)$ é limitada à esquerda por $a_1$: logo, essas duas seqüências possuem limites, digamos, $A$ e $B$ respectivamente. Como $a_n < b_n$, é claro que

$$a_n \leq A \leq B \leq b_n.$$

Isso significa que $[A, B] \subset I_n$ para todo $n$. Então, se $A < B$, a interseção dos intervalos $I_n$ é o próprio intervalo $[A, B]$; e se $A = B$, como é o caso se $b_n - a_n$ tende a zero, essa interseção é o número $c = A = B$. Isso completa a demonstração.

A condição de que os intervalos $I_n$ sejam fechados é essencial no teorema anterior. Por exemplo, os intervalos $I_n = (0, 1/n)$ são encaixados e limitados, mas não são fechados. É fácil ver que sua interseção é vazia, não havendo um só número que pertença a todos esses intervalos. É também essencial que os intervalos sejam limitados. Por exemplo, $I_n = [n, \infty)$ é uma família de intervalos fechados e encaixados, mas sua interseção é vazia; eles não são limitados.

## Pontos aderentes e teorema de Bolzano-Weierstrass

Já vimos que se uma seqüência converge para um certo limite, qualquer subseqüência sua converge para esse mesmo limite. Quando a seqüência não converge, nem tende para $+\infty$ ou $-\infty$, diz-se que ela é *oscilante*. De fato, como veremos, nesse caso ela sempre terá várias subseqüências, cada uma tendendo para um limite diferente. Por exemplo, as seqüências $(-1)^n$, $(-1)^n(1 + 1/n)$, e $(-1)^n(1 - 1/n)$ possuem, todas elas, subseqüências convergindo ou para $+1$ ou para $-1$. Esses números são chamados "valores de aderência" da seqüência sob consideração.

**2.23. Definição.** *Diz-se que $L$ é um* valor de aderência *ou* ponto de aderência *de uma dada seqüência $(a_n)$ se $(a_n)$ possui uma subseqüência convergindo para $L$.*

Quando a seqüência não é limitada, seus elementos podem se espalhar por toda a reta, distanciando-se uns dos outros, como acontece com $a_n = n$, $a_n = 1 - n$ ou $a_n = (-1)^n(2n + 1)$. Em casos como esses não há, é claro, pontos aderentes.

Se a seqüência for limitada, estando seus elementos confinados a um intervalo $[A, B]$, eles são forçados a se acumularem em um ou mais "lugares" desse intervalo, o que resulta em um ou mais pontos aderentes da seqüência. Esse é o conteúdo do "teorema de Bolzano-Weierstrass", considerado a seguir. O leitor pode observar que sua demonstração está baseada na propriedade do supremo, via teorema dos intervalos encaixados.

**2.24. Teorema (de Bolzano-Weierstrass).** *Toda seqüência li mitada $(a_n)$ possui uma subseqüência convergente.* (Veja a versão original desse teorema na p. 129.)

*Demonstração.* Vamos utilizar o chamado método de bisseção, que explicaremos a seguir, no contexto da demonstração. Seja $(a_n)$ uma seqüência limitada, portanto, toda contida num intervalo fechado $I$, de comprimento $c$. Dividindo esse intervalo ao meio, obtemos dois novos intervalos (fechados) de mesmo comprimento $c/2$, um dos quais necessariamente conterá infinitos elementos da seqüência; seja $I_1$ esse intervalo. (Se os dois intervalos contiverem infinitos elementos da seqüência, escolhe-se um deles para ser $I_1$.) O mesmo procedimento aplicado a $I_1$ nos conduz a um intervalo fechado $I_2$, de comprimento $c/2^2$, contendo infinitos elementos da seqüência.

Continuando indefinidamente com esse procedimento, obtemos uma seqüência de intervalos fechados e encaixados $I_n$, de comprimento $c/2^n$, que tende a zero, cada um contendo infinitos elementos da seqüência $a_n$. Seja $L$ o elemento que, pelo Teorema 2.22, está contido em todos os intervalos $I_n$. Agora é só tomar um elemento $a_{n_1}$ da seqüência $(a_n)$ no intervalo $I_1$, $a_{n_2}$ no intervalo $I_2$ etc., tomando-os um após outro de forma que $n_1 < n_2 < \ldots$ Assim obtemos uma subseqüência $(a_{n_j})$ convergindo para $L$. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, seja $N$ tal que $c/2^N < \varepsilon$, de sorte que $I_m \subset (L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)$ para $m > N$. Portanto, para $j > N$, $n_j$ será maior do que $N$ (pois $n_j \geq j$), logo, $a_{n_j}$ estará no intervalo $(L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)$, o que prova que $a_{n_j} \to L$.

O leitor deve notar que a demonstração pode eventualmente permitir duas escolhas de intervalos em um ou mais estágios da divisão dos intervalos. Isto significa que pode haver uma, duas ou mais subseqüências convergentes, o que significa também que a seqüência original pode ter vários pontos aderentes.

## Critério de convergência de Cauchy

O Teorema 2.12 é um "critério de convergência," ou seja, um teorema que permite saber se uma dada seqüência é convergente, sem conhecer seu limite de antemão. Mas ele refere-se a um tipo particular de seqüências, as seqüências monótonas. Em contraste, o teorema seguinte, de caráter geral, é um critério de convergência que se aplica a qualquer seqüência.

**2.25. Teorema (critério de convergência de Cauchy).** *Uma condição necessária e suficiente para que uma seqüência $(a_n)$ seja convergente é que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, exista $N$ tal que*

$$n,\ m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{2.11}$$

*Observação.* A condição do teorema costuma ser escrita da seguinte maneira equivalente: *dado $\varepsilon > 0$, existe um índice $N$ tal que, para todo inteiro positivo $p$,*

$$n > N \Rightarrow |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon. \tag{2.12}$$

*Demonstração.* Provar que a condição é necessária significa provar que se $(a_n)$ converge para um limite $L$, então vale a condição (2.11). Essa é a parte mais fácil do teorema, pois, em vista da hipótese, dado $\varepsilon > 0$, existe $N$ tal que

$$n > N \text{ e } m > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon/2 \text{ e } |a_m - L| < \varepsilon/2.$$

Daqui e do fato de ser

$$|a_n - a_m| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |a_m - L|,$$

segue o resultado desejado.

Para provar que a condição é suficiente, a hipótese agora é (2.11). Queremos provar que existe $L$ tal que $a_n \to L$. Não dispomos desse $L$, temos de provar sua existência. Procedemos provando, primeiro, que a seqüência em pauta é limitada; portanto, por Bolzano-Weierstrass, possui uma subseqüência convergente para um certo número $L$. Finalmente provamos que $a_n \to L$.

Fazendo $m = N+1$ em (2.11), teremos: $n > N \Rightarrow a_{N+1} - \varepsilon < a_n < a_{N+1} + \varepsilon$, donde se vê que a seqüência, a partir do índice $N+1$, é limitada. Ora, os termos correspondentes aos primeiros $N$ índices são em número finito; portanto, limitados, ou seja, a seqüência toda é limitada pelo maior dos números

$$|a_1|, \ldots, |a_N|, \ |a_{N+1} - \varepsilon|, \ |a_{N+1} + \varepsilon|.$$

Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, $(a_n)$ possui uma subseqüência $(a_{n_j})$ que converge para um certo $L$. Fixemos $j$ suficientemente grande para termos, simultaneamente, $|a_{n_j} - L| < \varepsilon$ e $n_j > N$. Então, como

$$|a_n - L| = |(a_n - a_{n_j}) + (a_{n_j} - L)| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - L|,$$

teremos, finalmente:

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - L| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

e isso estabelece o resultado desejado.

**2.26. Definição.** *Chama-se* seqüência de Cauchy *toda seqüência que satisfaz uma das condições equivalentes (2.11) e (2.12).*

Como vimos no teorema anterior, seqüências de Cauchy são as seqüências convergentes. Esse tipo de seqüência surgiu no final do século XVIII em conexão com processos numéricos para resolver equações. Por exemplo, uma equação como $x^3 - 8x + 1 = 0$ pode-se escrever na forma $x = (x^3+1)/8$, ou $x = f(x)$, onde $f(x) = (x^3+1)/8$. Com a equação nesta forma, podemos construir uma seqüênncia numérica infinita, começando com um certo valor $x_1$, assim:

$$x_2 = f(x_1), \ \ x_3 = f(x_2), \ \ x_4 = f(x_3), \ \text{ etc.}$$

Em geral, $x_n = f(x_{n-1})$, com $n = 2, 3, 4, \ldots$ Se for possível provar que essa é uma seqüência de Cauchy, saberemos que ela converge para um certo $x_0$. Em seguida procura-se provar que $x_0$ é solução da equação dada, os elementos $x_n$ sendo valores aproximados da solução

O esquema que acabamos de descrever é, na verdade, um poderoso instrumento de cálculo numérico (conhecido como "método das aproximações sucessivas"), além de ter também uma enorme importância teórica em várias teorias matemáticas.

## Exercícios

1. Prove que uma seqüência converge para $L$ se e somente se $L$ é seu único ponto de aderência.
2. Prove que uma seqüência limitada que não converge possui pelo menos dois pontos aderentes.
3. Prove que $L$ é ponto de aderência de uma seqüência $(a_n)$ se e somente se, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existem infinitos elementos da seqüência no intervalo $[L - \varepsilon,\, L + \varepsilon]$. (Note que esta última afirmação não significa que os infinitos elementos sejam todos distintos, podem até ter todos o mesmo valor.)
4. Construa uma seqüência com elementos todos distintos e que tenha pontos de aderência em $-1$, $1$ e $2$.
5. Construa uma seqüência com uma infinidade de elementos inferiores a 3 e superiores a 7, mas que tenha 3 e 7 como pontos aderentes e somente estes.
6. Construa uma seqüência com elementos todos distintos entre si, tendo como pontos de aderência $k$ números distintos dados, $L_1 < \ldots < L_k$ e somente esses.
7. Sabemos que o conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais é enumerável. Seja $(r_n)$ uma seqüência desses números numa certa enumeração, isto é, uma seqüência com elementos distintos, cujo conjunto de valores é $\mathbf{Q}$. Prove que todo número real é ponto de aderência dessa seqüência.
8. Seja $(a_n)$ uma seqüência tal que toda sua subseqüência possui uma subseqüência convergindo para um mesmo número $L$. Prove que $(a_n)$ converge para $L$.
9. Prove que uma seqüência $(a_n)$ que não é limitada possui uma subseqüência $(a_{n_j})$ tal que $1/a_{n_j} \to 0$.
10. Dê exemplo de uma seqüência não limitada que tenha subseqüências convergentes; e de seqüência não limitada que não tenha uma única subseqüência convergente.
11. Vimos que a propriedade do supremo tem como conseqüência a propriedade dos intervalos encaixados. Prove que esta última propriedade implica a propriedade do supremo, ficando assim provado que a propriedade do supremo equivale à propriedade dos intervalos encaixados.
12. Prove que se postularmos que "toda seqüência não decrescente e limitada é convergente" conseguiremos provar a propriedade dos intervalos encaixados, portanto, também a propriedade do supremo, estabelecendo assim que esta propriedade é equivalente a afirmar que "toda seqüência não decrescente e limitada converge."
13. Prove, diretamente da Definição 2.26, que as seguintes seqüências são de Cauchy:

$$\text{a) } a_n = 1 + \frac{1}{n}; \quad \text{b) } a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

14. Prove, diretamente da Definição 2.26, que se $(a_n)$ e $(b_n)$ são seqüências de Cauchy, também o são $(a_n + b_n)$ e $(a_n b_n)$.

15. Sejam $(a_n)$ e $(b_n)$ seqüências de Cauchy, com $b_n \geq b > 0$. a) Prove que $(a_n/b_n)$ também é de Cauchy. b) Dê um contra-exemplo para mostrar que isto nem sempre é verdade se $b_n \to 0$.

16. Dados $a_1$ e $a_2$, com $a_1 < a_2$, considere a seqüência assim definida: $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2})$, $n = 3, 4, 5, \ldots$ a) Prove que $a_1, a_3, a_5, \ldots$ é seqüência crescente e limitada; e que a seqüência de índices pares, $a_2, a_4, a_6, \ldots$, é decrescente e limitada. b) Prove que $(a_n)$ é seqüência de Cauchy.

17. Observe que o Teorema 2.25 nos mostra que a propriedade do supremo tem como conseqüência que toda seqüência de Cauchy converge. Prove a recíprova dessa proposição, isto é, prove que se toda seqüência de Cauchy converge, então vale a propriedade do supremo, ficando assim provado que essa propriedade é equivalente a toda seqüência de Cauchy ser convergente.

## Sugestões e soluções

1. Comece provando que $a_n$ convergir para $L$ significa que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, só existe um número finito de elementos da seqüência fora do intervalo $[L - \varepsilon,\ L + \varepsilon]$.

4. Eis um modo de fazer isso: considere três seqüências distintas, $-1+1/n$, $1+1/n$ e $2+1/n$, as quais convergem para $-1$, 1 e 2, respectivamente. Em seguida "misture" convenientemente essas seqüências; por exemplo, tomando um elemento de cada uma delas em sucessão e repetidamente, construindo a seqüência $(a_n)$, assim definida:

$$a_{3n} = -1 + 1/3n; \quad a_{3n+1} = 1 + 1/(3n+1); \quad a_{3n+2} = 2 + 1/(3n+2).$$

6. Reveja o Exerc. 6 da p. 63.

8. Se $(a_n)$ não converge para $L$, existe um $\varepsilon > 0$ e uma infinidade de elementos $a_n$ tais que $|a_n - L| > \varepsilon$.

11. Seja $C$ um conjunto não vazio e limitado superiormente. Queremos provar que $C$ possui supremo. Seja $a_1 \leq$ algum elemento de $C$ e $b_1 > a_1$ uma cota superior de $C$. Seja a= $(a_1 + b_1)/2$ e seja $[a_2,\ b_2]$ aquele dos intervalos $[a_1,\ a]$ e $[a,\ b_1]$ tal que $a_2 \leq$ algum elemento de $C$ e $b_2$ é cota superior de $C$. Assim prosseguindo, indefinidamente, construimos uma família de intervalos encaixados $I_n = [a_n,\ b_n]$, cuja interseção determina um número real $c$. Prove que $c$ é o supremo de $C$.

12. Prove primeiro que toda seqüência não crescente e limitada converge.

13. a) Observe que $|a_n - a_{n+p}| = \dfrac{p}{n(n+p)} < \dfrac{1}{n}$. Quanto à parte b), observe que $|a_n - a_{n+p}|$ é menor do que o $R_n$ da p. 83.

14. Observe que $a_n b_n - a_m b_m = a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)$ e que $(a_n)$ e $(b_n)$ são seqüências limitadas.

15. Observe que

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_m}{b_m}\right| = \frac{|a_n b_m - a_m b_n|}{b_n b_m} \leq \frac{|a_n(b_m - b_n) + b_n(a_n - a_m)|}{b_n b_m},$$

que $b_n b_m \geq b^2$ e que as seqüências originais são limitadas.

16. a) Comece fazendo um gráfico representando $a_1$, $a_2$, $a_3$. $a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$, etc. Percebe-se que $(a_{2n})$ é seqüência decrescente e $(a_{2n+1})$ é crescente. Prove isso. b) Prove que

$$|a_n - a_{n-1}| = \frac{1}{2}|a_{n-1} - a_{n-2}| = \frac{1}{2^2}|a_{n-2} - a_{n-3}| = \ldots = \frac{1}{2^{n-2}}|a_2 - a_1|.$$

Observe também que

$$|a_n - a_{n+p}| \leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \ldots |a_{n+p-1} - a_{n+p}|.$$

17. Basta provar que vale a propriedade dos intervalos encaixados.

# Notas históricas e complementares

## A não enumerabilidade dos números reais

O Teorema 2.22 permite dar outra demonstração de que o conjunto dos números reais não é enumerável, como faremos agora. Raciocinando por absurdo, suponhamos que todos os números reais estivessem contidos numa seqüência $(x_n)$. Seja $I_1 = [a_1, b_1]$ um intervalo que não contenha $x_1$. Em seguida tomamos um intervalo $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$, que não contenha $x_2$; depois um intervalo $I_3 = [a_3, b_3] \subset I_2$, que não contenha $x_3$; e assim por diante. Dessa maneira obtemos uma seqüência $(I_n)$ de intervalos fechados e encaixados, tal que $\cap I_n$ conterá ao menos um número real $c$. Isso contradiz a hipótese inicial de que todos os números reais estão na seqüência $(x_n)$, visto que $x_n \notin \cap I_n$. Somos, pois, forçados a abandonar a hipótese inicial e concluir que o conjunto dos números reais não é enumerável.

## Cantor e os números reais

Vimos, no Capítulo 1, como Dedekind construiu os números reais a partir dos racionais. Exporemos agora a construção dos reais feita por Cantor.

Georg Cantor (1845–1918) nasceu em São Petersburgo, onde viveu até 1856, quando sua família transferiu-se para o sul da Alemanha. Doutorou-se pela Universidade de Berlim, onde foi aluno de Weierstrass, de quem teve grande influência em sua formação matemática. Toda a sua carreira profissional desenvolveu-se em Halle, para onde transferiu-se logo que terminou seu doutorado em Berlim.

Como no método de Dedekind, também no de Cantor partimos do pressuposto de que já estamos de posse dos números racionais, com todas as suas propriedades. Começamos com a seguinte definição: *diz-se que uma seqüência $(a_n)$ de números racionais é uma seqüência de Cauchy se, qualquer que seja o número (racional) $\varepsilon > 0$, existe $N$ tal que $n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$.* Uma tal seqüência costuma também ser chamada "seqüência fundamental." O próprio Cantor usou essa designação. Observe que existem pelo menos tantas seqüências de Cauchy quantos são os números racionais, pois, qualquer que seja o número racional $r$, a seqüência constante $(r_n) = (r, r, r, \ldots)$ é de Cauchy. Dentre as seqüências de Cauchy, algumas são convergentes, como essas seqüências constantes, uma seqüência como $(1/2,\ 2/3,\ 3/4, \ldots)$ e uma infinidade de outras mais. Mas há também toda uma infinidade de seqüências de Cauchy que não convergem (para número racional), como a seqüência das aproximações decimais por falta de $\sqrt{2}$,

$$(r_n) = (1,\ 14,\ 1,41,\ 1,414,\ 1,4142\ldots), \tag{2.13}$$

ou a seqüência $a_n = (1 + 1/n)^n$ que define o número $e$. Como se vê, essas seqüências só não convergem por não existirem ainda os números chamados "irracionais." Para criá-los, podemos simplesmente *postular* que "toda seqüência de Cauchy (de números racionais) converge". Feito isso teremos de mostrar como esses novos números se juntam aos antigos (os racionais) de forma a produzir um corpo ordenado completo. E nesse trabalho teriamos de provar que diferentes seqüências definem o mesmo número irracional; por exemplo, a seqüência (2.13) e a seqüência das aproximações decimais por excesso de $\sqrt{2}$ devem definir o mesmo número irracional $\sqrt{2}$. Do mesmo modo, as seqüências

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ e } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n}$$

devem definir o mesmo número $e$.

Por causa disso torna-se mais conveniente primeiro juntar em uma mesma classe todas as seqüências que terão um mesmo limite, para depois construir a estrutura de corpo. Fazemos isso definindo, no conjunto das seqüências de Cauchy, uma "relação de equivalência", assim: duas seqüências de Cauchy $(a_n)$ e $(b_n)$ são *equivalentes* se $(a_n - b_n)$ é uma seqüência nula, isto é, $a_n - b_n \to 0$. Essa relação distribui as seqüências de Cauchy em classes de seqüências equivalentes, de tal maneira que *duas seqüências pertencem a uma mesma classe se, e somente se, elas são equivalentes.*

Cada número racional $r$ está naturalmente associado à classe de seqüências a que pertence a seqüência constante $r_n = r$. Muitas das classes, todavia, escapam a essa associação. Por exemplo, considere a classe à qual pertence a seqüência (2.13). É fácil ver que nenhuma seqüência $r_n = r$, com $r$ racional, pode pertencer a essa classe, senão $r - r_n$ teria de tender a zero, o que é impossível. Essas classes que não contêm seqüências do tipo $r_n = r$ são precisamente aquelas que corresponderão aos números irracionais, a serem criados.

Para criar esses números, definimos, no conjunto das classes de equivalência, as operações de adição e multiplicação, e suas inversas, a subtração e a divisão. Assim, se $A$ e $B$ são classes de equivalência, tomamos elementos representativos em cada uma delas, digamos, $(a_n)$ em $A$ e $(b_n)$ em $B$ e definimos $A + B$ como sendo a classe à qual pertence a seqüência $(a_n + b_n)$. Essa definição exige que provemos que se $(a_n)$ e $(b_n)$ são seqüências de Cauchy, o mesmo é verdade de $(a_n + b_n)$; e que a soma $A + B$ independe das seqüências particulares $(a_n)$ e $(b_n)$ que tomamos em $A$ e $B$ respectivamente.

De maneira análoga definimos: a *classe nula* "0" é a classe das seqüências nulas; o *elemento oposto* $-B$ de uma classe $B$ é a classe das seqüências equivalentes a $(-b_n)$; a *diferença* $A - B$ é simplesmente $A + (-B)$; o produto $AB$ é a classe das seqüências $(a_n b_n)$; o *elemento inverso* $B^{-1}$ de uma classe não nula $B$ é a classe das seqüências equivalentes a $(1/b_n)$; e o *quociente* $A/B$, onde $B \neq 0$, é o produto $AB^{-1}$. Se $A \neq 0$, prova-se que se $(a_n) \in A$, então existe um número racional $m > 0$ tal que $a_n > m$ ou $a_n < -m$ a partir de um certo índice $N$; e sendo isso verdade para uma seqüência, prova-se que é verdade para toda seqüência de $A$, o que nos leva a definir "$A > 0$" ou "$A < 0$" respectivamente. Definimos "$A > B$" como sendo $A - B > 0$ e $|A| = A$ se $A \geq 0$ e $|A| = -A$ se $A < 0$.

Com todas essas definições e propriedades correlatas estabelecidas, resulta que o conjunto das classes de equivalência das seqüências de Cauchy de números racionais é um corpo ordenado **R**. Nesse corpo definimos "seqüências de Cauchy" de maneira óbvia e provamos que *toda seqüência de Cauchy de elementos de* **R** *é convergente*, isto é, *se* $A_n$ *uma seqüência de Cauchy de elementos de* $R$, *então existe um elemento* $A$ *de* $R$ *tal que* $A_n \to A$, *ou seja*, $A_n - A \to 0$.

O corpo **R** assim construído contém um sub-corpo **Q'** isomorfo ao corpo dos números racionais. Esse sub-corpo **Q'** é precisamente o conjunto das classes cujos elementos são seqüências equivalentes a seqüências constantes de números racionais $(r, r, r, \ldots)$. Nada mais natural, pois, do que identificar o corpo original dos números racionais **Q** com o corpo **Q'**, um procedimento análogo ao da identificação de cada número racional $r$ com o corte de Dedekind $(E, D)$ que ele define.

A propriedade de que em **R** "toda seqüência de Cauchy converge" significa que **R** é completo, mesmo porque se tentarmos repetir nesse corpo a mesma construção de classes de equivalência de seqüências de Cauchy, chegaremos a um novo corpo **R'** isomorfo a **R**, portanto, **R'** nada acrescenta a **R**. Na verdade, a menos de isomorfismo, só existe um corpo ordenado completo. Portanto **R** é o mesmo corpo dos números reais construído pelo processo de Dedekind. Aliás, como vimos no Exerc. 17 atrás, a propriedade de que toda seqüência de Cauchy converge é equivalente à propriedade do supremo.

Nessa construção dos números reais por seqüências de Cauchy, cada número racional $r$ é identificado com a classe que contém a seqüência constante $r_n = r$. As classes que escapam a essa identificação correspondem aos elementos novos introduzidos, os *números irracionais*. É esse o caso da classe que contém a seqüência (2.13), e que define $\sqrt{2}$.

O leitor que esteja se expondo a essas idéias pela primeira vez talvez sinta um certo desconforto quando dizemos que um número real, como $\sqrt{2}$, é toda uma classe de seqüências de Cauchy (de números racionais) equivalentes entre si. Na verdade, basta uma só seqüência dessa classe para identificar o número em questão. Assim, a classe que define $\sqrt{2}$ está perfeitamente caracterizada pela seqüência (2.13). E uma breve reflexão há de convencer o leitor de que, pelo menos tacitamente, ele sabe disso há muito tempo, desde que se familiarizou com a idéia de aproximações de um número como $\sqrt{2}$. Esse símbolo nada mais é do que um modo conveniente de designar o conjunto dessas aproximações; é claro que é muito mais fácil escrevê-lo do que escrever uma seqüência que o caracterize. Mas por que preferir a seqüência (2.13) e não a das aproximações decimais por excesso? Ou alguma subseqüência dessas? Ou qualquer outra seqüência a elas equivalente? Como se vê, um pouquinho de reflexão é o bastante para dissipar qualquer desconforto inicial e revelar que $\sqrt{2}$ é mesmo toda uma classe de seqüências equivalentes.

Se essas observações ajudam a dissipar o desconforto inicial do leitor, pode ser que ele ainda não se conforme com essa construção de Cantor dos números reais. Nada mais natural do que perguntar se não bastaria a construção de Dedekind, por mais engenhosa que seja essa de Cantor. De fato, muitas teorias matemáticas — às vezes bem engenhosas — são abandonadas e até esquecidas, por serem suplantadas por outras. Mas não é esse o caso da construção de Cantor. Pelo contrário, esse método das "seqüências de Cauchy" é de grande eficácia em domínios onde a solução de algum problema é obtida por algum tipo de aproximação. Essa solução é então caracterizada por uma seqüência de Cauchy, uma seqüência dos valores aproximados da solução. O Exemplo 2.21 (p. 61) descreve uma situação dessas, relativamente elementar, onde estamos ainda lidando com "números". Mas é freqüente acontecer que a solução de um certo problema seja um objeto mais complicado que um número; por exemplo, um elemento de um conjunto de funções, no qual conjunto exista um modo de medir o distanciamento entre os vários elementos desse conjunto. Isso dá origem, de maneira bastante natural, ao que se chama "espaço métrico". Nesse contexto a noção de seqüência de Cauchy ocorre também naturalmente e é o instrumento adequado para fazer o que se chama "completar o espaço", um processo análogo à construção dos números reais pelo método de Cantor.

Como já dissemos, os métodos de Dedekind e Cantor são os dois mais usados na construção dos números reais. Mas, como vimos nos exercícios atrás, a propriedade dos intervalos encaixados e a propriedade das seqüências monótonas ("toda seqüência não decrescente e limitada converge") são equivalentes à propriedade do supremo e à propriedade das seqüências de Cauchy ("toda seqüência de Cauchy converge"). Isso garante que, além dos métodos de Dedekind e Cantor, poderiamos chegar aos números reais postulando, no conjunto dos números racionais, seja a propriedade dos intervalos encaixados ou a propriedade das seqüências monótonas. Mas, como é fácil ver, isso redundaria numa construção dos números reais praticamente idêntica à de Dedekind.

## Bolzano e o teorema de Bolzano-Weierstrass

O critério de convergência de Cauchy aparece pela primeira vez num trabalho de Bolzano de

1817, pouco divulgado; e posteriormente num livro de Cauchy de 1821 (de que falaremos mais nas pp. 97 e 128), que teve grande divulgação e influência no meio matemático.

Bernhard Bolzano (1781–1848) nasceu, viveu e morreu em Praga. Era sacerdote católico que, além de se dedicar a estudos de Filosofia, Teologia e Matemática, tinha grandes preocupações com os problemas sociais de sua época. Seu ativismo em favor de reformas educacionais, sua condenação do militarismo e da guerra, sua defesa da liberdade de consciência e em favor da diminuição das desigualdades sociais custaram-lhe sérios embaraços com o governo. As idéias de Bolzano em Matemática não foram menos avançadas. É até admirável que, vivendo em relativo isolamento em Praga, afastado do principal centro científico da época, que era Paris, e com outras ocupações, ele tenha tido sensibilidade para problemas de vanguarda no desenvolvimento da Matemática. Infelizmente, seus trabalhos permaneceram praticamente desconhecidos até por volta de 1870. Seu trabalho de 1817 (com o longo título de *Prova puramente analítica da afirmação de que entre dois valores que garantem sinais opostos* (de uma função) *jaz ao menos uma raiz da equação* [função]) representa um dos primeiros esforços na eliminação da intuição geométrica das demonstrações. Seu objetivo era provar o teorema do valor intermediário (p. 122) por meios puramente analíticos, sem recorrer à intuição geométrica. E é aí que aparece, pela primeira vez, a proposição que ficaria conhecida como "critério de Cauchy" (veja o comentário sobre Cauchy no final do próximo capítulo), formulado para o caso de uma seqüência de funções, nos seguintes termos:

*"Se uma seqüência de grandezas*

$$F_1(x),\ F_2(x), \ldots,\ F_n(x), \ldots,\ F_{n+r}(x), \ldots$$

*está sujeita à condição de que a diferença entre seu n-ésimo membro $F_n(x)$ e cada membro seguinte $F_{n+r}(x)$, não importa quão distante do n-ésimo termo este último possa estar, seja menor do que qualquer quantidade dada, desde que n seja tomado bastante grande; então, existe uma e somente uma determinada grandeza, da qual se aproximam mais e mais os membros da seqüência, e da qual eles podem se tornar tão próximos quanto se deseje, desde que a seqüência seja levada bastante longe".*

Como se vê, essa proposição é o enunciado de uma condição suficiente de convergência da seqüência. A necessidade da condição fora notada por vários matemáticos antes de Bolzano e Cauchy. A demonstração tentada por Bolzano é incompleta; e não podia ser de outro modo, já que ela depende de uma teoria dos números reais, que ainda não estava ao alcance de Bolzano. Ele usa essa condição para demonstrar outra proposição sobre existência de supremo de um certo conjunto, a qual, por sua vez, é usada na demonstração do teorema do valor intermediário. O método de bisseção que Bolzano utiliza na demonstração dessa proposição é também usado por Weierstrass nos anos sessenta para demonstrar o teorema que ficaria conhecido pelos nomes desses dois matemáticos. É interessante notar que praticamente o mesmo enunciado de Weierstrass aparece num trabalho de Bolzano de 1830, *Théorie des fonctions*, só publicado cem anos mais tarde, muito depois de se haver consagrado o nome "teorema de Bolzano-Weierstrass".