Capítulo 6

Funções, limite e continuidade

O leitor vem se familiarizando com a idéia de função desde o ensino médio. Tendo em conta a importância desse conceito no Cálculo e na Análise, vamos retomá-lo neste capítulo, começando com alguns aspectos de sua evolução histórica a partir do século XVII. Embora a idéia de função possa ser identificada em obras do século XIV, foi só a partir do século XVII que ela teve grande desenvolvimento e utilização. Isso porque, nessa época surgiu a Geometria Analítica, e muitos problemas matemáticos puderam ser convenientemente formulados e resolvidos em termos de variáveis ou incógnitas que podiam ser representadas em eixos de coordenadas.

6.1 Conceitos básicos

Uma das questões que ocupou a atenção dos matemáticos do século XVII foi o problema de traçar a reta tangente a uma dada curva (Fig. 6.1). Nesse problema intervêm várias grandezas, como a ordenada do ponto de tangência T, os comprimentos da tangente OT, da subtangente OA, da normal TN e da subnormal AN. E as investigações que sobre isso se faziam giravam em torno de equações envolvendo essas várias grandezas, as quais eram encaradas como diferentes variáveis ligadas à curva, em vez de serem vistas como funções separadas de uma única variável independente. Mas, aos poucos, uma dessas variáveis — no caso, a abscissa de T — foi assumindo o papel do que hoje chamamos a *variável independente*.

A palavra "função"foi introduzida por Leibniz em 1673, justamente para designar qualquer das várias variáveis geométricas associadas com uma dada curva. Só aos poucos é que o conceito foi-se tornando independente de curvas particulares e passando a significar a dependência de uma variável em termos de outras. Mas, mesmo assim, por todo o século XVIII, o conceito de função permaneceu quase só restrito à idéia de uma variável (dependente) expressa por

alguma fórmula em termos de outra ou outras variáveis (independentes).

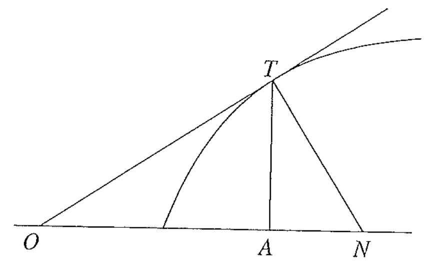

Figura 6.1

Ao lado da definição de função surgia o conceito de continuidade. Euler entendia por contínua a função que fosse dada por uma única expressão analítica, e por descontínua quando fosse dada por expressões diferentes em diferentes partes de seu domínio de definição. Mas isso resultava em interpretações contraditórias. Por exemplo, por um lado, a expressão

$$y = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2}{x^2+t^2}dt$$

estaria definindo y como função contínua de x por ser dada por uma única expressão analítica. Acontece que essa integral pode ser facilmente calculada com a substituição $t = xs$, resultando em (faça o gráfico)

$$y = x \quad \text{se } x \geq 0 \quad \text{e} \quad y = -x \quad \text{se } x \leq 0.$$

Agora, de acordo com Euler, a função seria descontínua por ser dada por diferentes expressões analíticas em diferentes partes de seu domínio, uma clara contradição com a interpretação anterior.

O exemplo de função que acabamos de dar, em termos do processo infinito de integração, mostra que as idéias de função e continuidade então adotadas eram inadequadas, coisa que se tornou ainda mais evidente com o tratamento de funções por outro processo infinito, o das "séries trigonométricas". Essas séries já haviam sido utilizadas em meados do século XVIII por Daniel Bernoulli no estudo das vibrações de uma corda esticada, mas quem mais se valeu dessas séries foi o físico-matemático Joseph Fourier em seus estudos sobre propagação do calor em sólidos. Com efeito, Fourier realizou muitas investigações sobre esse fenômeno, partindo de uma equação a derivadas parciais, chamada "equação do calor". O procedimento de Fourier, que ficou consagrado até os dias de hoje, consistia em obter soluções particulares da equação, com as quais se montava uma série infinita com coeficientes a determinar. Estes eram encontrados pela imposição de certas condições à solução do problema, dentre as quais as chamadas "condições iniciais". Isso resultava em certas funções serem conhecidas pelo seu desenvolvimento nas tais séries trigonométricas. Eis um exemplo simples de tal função:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx.$$

Observe que os termos dessa série são funções regulares, bem comportadas. Isso fazia supor aos matemáticos da época que a soma infinita também fosse uma função bastante regular. O próprio Cauchy chegou a lidar com séries infinitas como se fosse assim. Acontece que a soma da série em pauta pode ser obtida em forma bem simples, e revela um fenômeno surpreendente: ela tem uma infinidade de pontos de descontinuidade, agora pontos onde ocorrem rupturas do gráfico da função. De fato, efetuada a soma (cujo procedimento não será considerado aqui), obtemos

$$f(x) = \frac{x}{2} \text{ se } -\pi < x < \pi; \quad f(-\pi) = f(\pi) = 0,$$

cujo gráfico, ilustrado na Fig. 6.2, é um segmento retilíneo que se repete periodicamente, com a aparência de uma serra, exibindo descontinuidades nos pontos $x = n\pi$. Como os termos da série inicial que define a função são todos eles funções contínuas e muito regulares, concluímos que foi o processo de soma infinita que fez surgir as descontinuidades do gráfico.

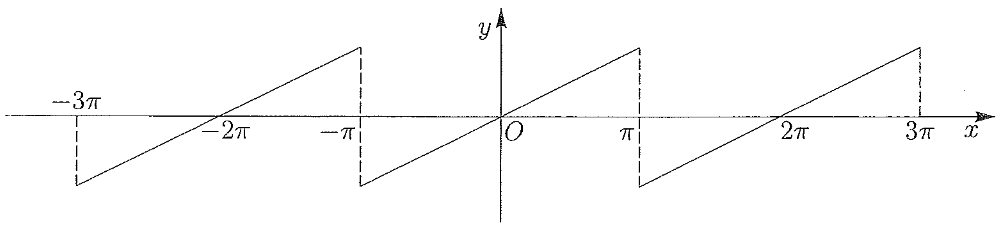

Figura 6.2

Exemplos de funções como esses dois que demos aqui deixam claro que os conceitos de função e continuidade então em voga eram mesmo inadequados. A definição mais geral de função que utilizamos hoje e que é dada logo a seguir, evoluiu principalmente dos trabalhos de Fourier e Dirichlet no século XIX, e sobre os quais falaremos mais em nota no final do capítulo.

6.1. Definição. *Uma função $f\colon D \mapsto Y$ é uma lei que associa elementos de um conjunto D, chamado o domínio da função, a elementos de um outro conjunto Y, chamado o contradomínio da função.*

Em geral, o contradomínio é um conjunto fixo, o mesmo para toda uma classe de funções sob consideração, não acontecendo necessariamente que todo elemento de Y provenha de algum elemento do domínio pela ação da função que esteja sendo considerada. Já com o domínio a situação é diferente, pois cada função tem seu domínio próprio, e a função age sobre todos os elementos de seu domínio.

Em nosso estudo estaremos interessados tão somente em funções cujos domínios sejam subconjuntos dos números reais, principalmente intervalos dos vários tipos considerados logo no início do Capítulo 4. O contradomínio será sempre o mesmo, o conjunto dos números reais.

Terminologia e notação

Costuma-se denotar com $f(x)$ o elemento que uma função f associa ao elemento x. Escreve-se:

$$f\colon\ x \in D \mapsto y = f(x),$$

significando com isso que y é a imagem de x pela f. Outro modo consiste em identificar a função com seu *gráfico*, que é o conjunto $f = \{(x, f(x)) : x \in D\}$. É muito comum dizer "seja a função $y = f(x)$", em cujo caso estamos usando o próprio símbolo $y = f(x)$ para denotar a função f, embora com certa impropriedade, pois $f(x)$ é o valor da função num valor particular de D. Portanto, quando essa notação é usada, deve-se entender que x denota qualquer valor no domínio D, por isso mesmo chama-se *variável* de domínio D, a chamada *variável independente*, enquanto que y é a *imagem de x pela função f*, a chamada *variável dependente.*

O conjunto de todos os valores da função,

$$I_f = \{y = f(x)\colon\ x \in D\},$$

é chamado a *imagem de D pela f*, e freqüentemente indicado por $f(D)$. De um modo geral, sendo A um subconjunto de D, define-se a imagem de A mediante a expressão

$$f(A) = \{f(x)\colon\ x \in A\}.$$

Para caracterizar uma função não basta prescrever a lei de correspondência f; é necessário também especificar seu domínio D. Freqüentemente as funções são dadas por fórmulas algébricas ou analíticas, como

$$f(x) = x^2 + 1; \quad f(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt; \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\,.$$

Mas nem sempre é assim; teremos oportunidade de lidar com funções dadas por leis bem gerais, que não se enquadram nessas categorias.

Muitas vezes o domínio de uma função não é mencionado, ficando subentendido tratar-se do maior conjunto para o qual a expressão que define a função faz sentido. Assim, nos dois primeiros exemplos acima, o domínio é o conjunto de todos os números reais, enquanto no último é o semi-eixo $x > 1$.

Uma função f com domínio D é dita *limitada à esquerda* ou *limitada inferiormente* se existe um número A tal que $A \leq f(x)$ para todo $x \in D$; e *limitada à direita* ou *limitada superiormente* se existe um número B tal que $f(x) \leq B$ para todo $x \in D$. Uma função que é limitada à direita e à esquerda ao mesmo tempo é dita, simplesmente, *limitada*; é claro que isso equivale a dizer que existe um número M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in D$.

Diz-se que uma função g é *extensão* de uma função f, ou que f é restrição de g, se o domínio de f está contido no domínio de g e as duas funções coincidem no domínio de f. As operações sobre funções, como *adição, multiplicação, divisão*, etc., são definidas de maneira óbvia, em termos das mesmas operações sobre números. É claro que as funções sobre as quais se fazem essas operações devem ter o mesmo domínio; e se não for esse o caso, é necessário restringir os domínios ao conjunto interseção dos domínios das funções envolvidas. Por exemplo, embora a função $f(x) = x^2$ esteja definida para todo x real, o produto $g(x) = x^2\sqrt{x}$ é uma função com domínio $x \geq 0$, o mesmo da função $h(x) = \sqrt{x}$.

Vários tipos de função

Sejam f e g duas funções, com domínios D_f e D_g, respectivamente. Suponhamos que $g(D_g) \subset D_f$; assim, qualquer que seja $x \in D_g$, $g(x) \in D_f$ e podemos considerar $f(g(x))$. A função $h: x \mapsto f(g(x))$, com domínio D_g, é chamada *função composta* das funções f e g, freqüentemente indicada com o símbolo "$f o g$". Por exemplo, $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ é função composta das funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 1$. Como o domínio de f é o semi-eixo $x \geq 0$, o domínio de h é o conjunto dos números x tais que $|x| \geq 1$.

Diz-se que uma função $f\colon D \mapsto Y$ é *injetiva* ou *invertível* se

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Isso é o mesmo que afirmar: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$; e significa que cada elemento y da imagem de f provém de um único elemento x no domínio de f: $y = f(x)$. Isso nos permite definir a chamada *função inversa* da função f, freqüentemente indicada com o símbolo f^{-1}, que leva $y \in f(D)$ no elemento $x \in D$ tal que $f(x) = y$. É fácil ver então que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x D e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in f(D)$.

Diz-se que uma função $f\colon D \mapsto Y$ é *sobrejetiva* se $f(D) = Y$. Uma função que é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva tem inversa definida em todo o conjunto Y. Ela estabelece assim uma correspondência entre os elementos $x \in D$ e os elementos $y = f(x) \in Y$, que é chanada *correspondência biunívoca*, justamente por ser *unívoca* nos dois sentidos: cada elemento em D tem um e um só correspondente em Y pela f; e cada elemento de Y tem um e um só correspondente em D pela inversa f^{-1}. Uma função nessas condições é chamada uma *bijeção* ou *função bijetiva*. É claro que toda função injetiva é uma bijeção de D sobre $f(D)$.

Diz-se que uma função f definida num intervalo (limitado ou não) é *crescente* se $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$; *decrescente* se $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$; *não-decrescente* se $x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ e *não-crescente* se $x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$. Em todos esses casos f é chamada *função monótona*.

Diz-se que f é uma *função par* se seu domínio D é simétrico em relação à origem (isto é, $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$) e $f(-x) = f(x)$; f é *função ímpar* se o domínio é do mesmo tipo e $f(-x) = -f(x)$.

Dada uma função $f\colon D \mapsto Y$ e B um subconjunto de Y, define-se $f^{-1}(B)$ (mesmo que f não seja invertível) mediante

$$f^{-1}(B) = \{x \in D\colon f(x) \in B\}.$$

Então, $f^{-1}(Y) = D$ e $f^{-1}(B) = \phi$ se $B \cap f(D) = \phi$.

Exercícios

1. Considere a função $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, definida para todo $x \neq 0$. Estude seu gráfico, notando particularmente o comportamento da função quando $|x|$ torna-se arbitrariamente grande ou próximo de zero. Determine os pontos onde f se anula.
2. Faça o gráfico das funções $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ e $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, que estão definidas para todo $x \neq 0$.
3. Considere a seguinte função, conhecida como *função de Dirichlet*: $f(x) = 1$ se x é racional e $f(x) = 0$ se x é irracional. Descreva a função $g(x) = f(\sqrt{x})$.
4. Se f é a função de Dirichlet, descreva o conjunto $\{x\colon f(x) \leq x\}$. Descreva também o conjunto $\{x\colon f(x) \leq x^2\}$.
5. Prove que toda função crescente (decrescente) é invertível e sua inversa é crescente (decrescente).
6. Defina convenientemente o domínio de cada uma das funções seguintes, de forma que elas sejam invertíveis, e calcule suas inversas:

$$a)\ f(x) = x^2 - 2x - 3; \qquad b)\ f(x) = -x^2 + x + 2;$$

$$c)\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}; \qquad d)\ f(x) = -\sqrt{4 - x^2}.$$

7. Faça o gráfico da função $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Prove que sua imagem é o intervalo $|y| < 1$. Prove que ela é injetiva, provando que $y = y' \Rightarrow x = x'$. Calcule sua inversa.

8. Prove que toda função com domínio simétrico em relação à origem decompõe-se de maneira única na soma de uma função par com uma função ímpar.

9. Se f é uma função com domínio D e A e B são subconjuntos de D, prove que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ e $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Dê um contra-exemplo para mostrar que $f(A \cap B)$ pode ser diferente de $f(A) \cap f(B)$. Prove que a última inclusão é a igualdade se f for injetiva.

10. Prove, de um modo geral, que quaisquer que sejam a função f com domínio D e $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ uma seqüência enumerável de subconjuntos de D, valem as seguintes relações:

$$f(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \cup_{i=1}^{\infty} f(A_i); \quad f(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) \subset \cap_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

Prove ainda que esta última inclusão é a igualdade se f for injetiva.

11. Prove que se $f\colon D \mapsto Y$ é uma função qualquer e B um subconjunto de Y, então $f^{-1}(Y - B) = D - f^{-1}(B)$.

12. Sejam $f\colon D \mapsto Y$ uma função qualquer e A e B subconjuntos de Y. Prove que

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B); \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

13. Generalize o resultado anterior, provando que

$$f^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) \quad \text{e} \quad f^{-1}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \cap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i),$$

onde $f\colon D \mapsto Y$ é uma função qualquer e $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma seqüência enumerável de subconjuntos de Y.

14. Prove que se $f\colon D \mapsto Y$ é injetiva e $A \subset D$, então $f^{-1}(f(A)) = A$. Mostre, por contra-exemplo, que isso não é necessariamente verdade se f não for injetiva.

15. Prove que se $f\colon D \mapsto Y$ é sobrejetiva e $B \subset Y$, então $f(f^{-1}(B)) = B$. Mostre, por contra-exemplo, que isso não é necessariamente verdade se f não for sobrejetiva.

16. Se f é uma função qualquer, seja $|f|$ a *função módulo*, assim definida: $|f|(x) = |f(x)|$. Dadas duas funções f e g, com o mesmo domínio, expresse

$$(\max\{f,\ g\})(x) = \max\{f(x),\ g(x)\} \quad \text{e} \quad (\min\{f,\ g\})(x) = \min\{f(x),\ g(x)\}.$$

em termos da função módulo.

17. Seja f uma função com domínio D. Por $\sup_D f$, $\sup\limits_{x\in D} f(x)$, ou simplesmente $\sup f$, designa-se o supremo do conjunto $f(D) = \{f(x)\colon\ x \in D\}$; e analogamente para $\inf_D f$, $\inf\limits_{x\in D} f(x)$, ou $\inf f$. Sendo f e g funções limitadas num domínio D, prove que

$$\sup(f+g) \le \sup f + \sup g \quad \text{e} \quad \inf(f+g) \ge \inf f + \inf g.$$

Dê exemplos mostrando que os sinais de desigualdade podem ser estritos ou não.

18. Seja f uma função limitada num domínio D. A *oscilação* de f em D, denotada por ω ou, mais precisamente, $\omega(f,\ D)$, é definida por $\omega = M - m$, onde $M = \sup f$ e $m = \inf f$. Prove que $\omega = \sup A$, onde $A = \{f(x) - f(y)\colon\ x \in D,\ y \in D\}$.

Sugestões e soluções

1. Essa função é estudada detalhadamente em nosso livro de Cálculo [1].

3. Nos pontos x da forma $(p/q)^2$, com p e q primos entre si, $g(x) = 1$; nos demais pontos, $g(x) = 0$.

8. $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

9. Com referência à inclusão, se $y \in f(A \cap B)$, $y = f(x)$, com $x \in A \cap B$, logo $y \in f(A) \cap f(B)$. Pode acontecer que um certo y esteja em $f(A) \cap f(B)$ sem estar em $f(A \cap B)$. Para isso basta que y seja igual a $f(a)$ e igual a $f(b)$, com $a \in A$ e $b \in B$, sem que haja um $c \in A \cap B$ tal que $y = f(c)$. Dê um exemplo concreto dessa situação.

11. Observe que $x \in f^{-1}(Y - B) \Rightarrow f(x) \in Y$ e $f(x) \notin B$; e que isto implica $x \in D$ e $x \notin f^{-1}(B)$. Observe também que essas implicações são reversíveis.

16. $\max\{f,\ g\} = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$ e expressão análoga para $\min\{f,\ g\}$.

17. Observe que $(f+g)(D) = \{f(x) + g(x)\colon\ x \in D\} \subset f(D) + g(D)$ e aplique o resultado dos Exercícios 15 e 18 da p. 65. Ou, então, observe que, qualquer que seja $x \in D$,

$$\inf f + \inf g \le \inf f + g(x) \le f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad f(x) + g(x) \le \sup f + g(x) \le \sup f + \sup g.$$

18. É claro que $\sup A \le \omega$. Por outro lado, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existem x e y em D tais que $f(x) > M - \varepsilon/2$ e $f(y) < m + \varepsilon/2$, donde $f(x) - f(y) > \omega - \varepsilon$; e isso prova que $\omega \le \sup A$.