APÊNDICE I

AXIOMAS DE PEANO

1. Introdução

Numa teoria matemática, quando há necessidade de definir algo, isso obviamente é feito em termos de conceitos anteriores. Mas estes, por sua vez, também dependem de idéias precedentes. E assim por diante. Como evitar então que esse processo leve a círculos viciosos ou ao chamado *regressus in infinitum*?

Para o método axiomático a resposta consta de duas partes: primeiro, simplesmente aceitar certos termos da teoria sem uma explicação formal de seu significado — estes termos são chamados *conceitos primitivos* (na geometria elementar, por exemplo, em geral ponto, reta e plano); além disso, introduzir alguns *axiomas*, ou seja, certas proposições que se tomam como verdadeiras independentemente de qualquer demonstração. Na teoria então só há mais uma classe de proposições: a daquelas que se demonstram a partir dos axiomas por raciocínios lógicos corretos.

2. Os axiomas

Com vistas à fundamentação lógica da Aritmética, Peano escolheu três conceitos primitivos: o *zero*, o *número natural* e a relação *é sucessor de*. E, para caracterizá-los, formulou os seguintes axiomas:

P_1 Zero é um número natural.

P_2 Se a é um número natural, então a tem um único sucessor que também é um número natural.

P_3 Zero não é sucessor de nenhum número natural.

P_4 Dois números naturais que têm sucessores iguais são, eles próprios, iguais.

P_5 Se uma coleção S de números naturais contém o zero e, também, o sucessor de todo elemento de S, então S é o conjunto de todos os números naturais.

Adotaremos as seguintes notações: 0 para indicar o zero, a^+ para indicar o sucessor de um número natural a e $\mathbb{N}$ para denotar o conjunto dos números naturais. Isto posto, os axiomas de Peano podem assim ser enunciados:

P_1 $0 \in \mathbb{N}$

P_2 $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a^+ \in \mathbb{N}$

P_3 $(\forall a)(a \in \mathbb{N} \Rightarrow a^+ \neq 0)$

P_4 $a^+ = b^+ \Rightarrow a = b$

P_5 Se $S \subset \mathbb{N}$ e (i) $0 \in S$, (ii) $a \in S \Rightarrow a^+ \in S$, então $S = \mathbb{N}$.

O axioma $\mathbf{P_1}$ garante que $\mathbb{N} \neq \varnothing$. Em $\mathbf{P_2}$ deve-se subentender a unicidade de a^+. Do axioma $\mathbf{P_4}$ decorre que: $a \neq b \Rightarrow a^+ \neq b^+$, o que é óbvio pois $a^+ = b^+$ implica $a = b$. O axioma $\mathbf{P_5}$ chama-se *axioma da indução completa*.

PROPOSIÇÃO 1 Se $a \in \mathbb{N}$, então $a^+ \neq a$.

Demonstração: Seja $S = \{a \in \mathbb{N} \mid a^+ \neq a\}$. O axioma $\mathbf{P_3}$ garante que $0 \in S$. Se $a \in S$, então $a^+ \neq a$ e, pela observação anterior, $(a^+)^+ \neq a^+$. Logo $a^+ \in S$, sempre que $a \in S$. Por $\mathbf{P_5}$ conclui-se que $S = \mathbb{N}$. Ou seja: para todo $a \in \mathbb{N}$, $a^+ \neq a$. ■

PROPOSIÇÃO 2 Se $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, então existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $a^+ = b$.

Demonstração: Seja $S = \{0\} \cup \{y \in \mathbb{N} \mid y \neq 0 \text{ e } x^+ = y$, para algum $x \in \mathbb{N}\}$. Por construção $0 \in S$. Obviamente $0^+ \in S$. Agora, se $a \in S$ e $a \neq 0$, então $a = b^+$, para algum $b \in \mathbb{N}$. Daí $a^+ = (b^+)^+$ e portanto $a^+ \in S$. Novamente o axioma $\mathbf{P_5}$ garante que $S = \mathbb{N}$ e portanto a proposição é verdadeira. ■

PROPOSIÇÃO 3 (primeiro princípio de indução completa): Suponhamos que a todo número natural n esteja associada uma afirmação $P(n)$ tal que:

i $P(0)$ é verdadeira.

ii $P(r^+)$ é verdadeira, sempre que $P(r)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Basta verificar que $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ é verdadeira}\}$ satisfaz as hipóteses do axioma $\mathbf{P_5}$, o que, aliás, é imediato. ■

3. Adição em $\mathbb{N}$

A adição $(x, y) \rightarrow x + y$ em $\mathbb{N}$ é definida mediante as seguintes condições:

- $a + 0 = a$
- $a + b^+ = (a + b)^+$

Em $a + b = c$, a e b são as *parcelas* e c a *soma*. Como não poderia deixar de ser, adotaremos as seguintes notações: $0^+ = 1$, $1^+ = 2$, $2^+ = 3$, ... Nessas condições obtemos, por exemplo

$$1 + 1 = 1 + 0^+ = (1 + 0)^+ = 1^+ = 2$$
$$1 + 2 = 1 + 1^+ = (1 + 1)^+ = 2^+ = 3$$
$$1 + 3 = 1 + 2^+ = (1 + 2)^+ = 3^+ = 4$$
$$r + 1 = r + 0^+ = (r + 0)^+ = r^+, \forall r \in \mathbb{N}.$$

3.1 Propriedades da adição

$\mathbf{a_1}$ *Associativa*: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

Prova (por indução sobre c):

$c = 0$: $a + (b + 0) = a + b = (a + b) + 0$

Vamos supor: $(a + b) + r = a + (b + r)$
Então: $(a + b) + r^+ = [(a + b) + r]^+ = [a + (b + r)]^+ =$
$= a + (b + r)^+ = a + (b + r^+)$. ■

$\mathbf{a_2}$ *Comutativa*: $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$ (Exercício)

$\mathbf{a_3}$ O zero é o *elemento neutro* da adição.
A definição de adição e $\mathbf{a_2}$ garantem que 0 é elemento neutro. Deixamos como exercício a demonstração de que só há um elemento neutro para a adição.

$\mathbf{a_4}$ *Lei do cancelamento da adição*: $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

Prova (indução sobre a):

$a = 0 \Rightarrow b = a + b = a + c = c$

Façamos a hipótese: $r + b = r + c \Rightarrow b = c$
Suponhamos agora $r^+ + b = r^+ + c$. Então:

$$(b + r)^+ = b + r^+ = c + r^+ = (c + r)^+$$

Então, devido a $\mathbf{P_4}$: $b + r = c + r$. Donde $b = c$. ■

Na seqüência precisaremos do seguinte resultado:

- $a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$

Vamos supor $b \neq 0$. Então $b = u^+$, para algum $u \in \mathbb{N}$. Daí

$$0 = a + b = a + u^+ = (a + u)^+$$

o que é absurdo. Assim $b = 0$ e então $a = 0$. ■

4. Multiplicação em $\mathbb{N}$

A multiplicação $(x, y) \rightarrow xy$ (ou $x \cdot y$) de números naturais é definida pelas condições seguintes:

- $a \cdot 0 = 0$
- $a \cdot b^+ = ab + a$

Numa igualdade $ab = c$, a e b são os *fatores* e c o *produto*. Observemos os seguintes exemplos:

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 0^+ = 1 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$$
$$1 \cdot 2 = 1 \cdot 1^+ = 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$2 \cdot 1 = 2 \cdot 0^+ = 2 \cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2$$
$$2 \cdot 2 = 2 \cdot 1^+ = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4$$

4.1 Propriedades da multiplicação

Mostremos primeiro que $0 \cdot a = 0$, para todo $a \in \mathbb{N}$. Para $a = 0$ esse resultado decorre diretamente da definição dada. Supondo $0 \cdot r = 0$, então $0 \cdot r^+ = 0 \cdot r + 0 = 0 + 0 = 0$.

Também é fácil provar, por indução, que $1 \cdot a = a$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

Com isso torna-se possível demonstrar

$\mathbf{m_7}$ $(a + b)c = ac + bc$ e $a(b + c) = ab + ac$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ (propriedade *distributiva* da multiplicação em relação à adição).

Prova (primeira condição — indução sobre c):

$$c = 0: (a + b) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$$

Vamos supor $(a + b)r = ar + br$.
Então: $(a + b)r^+ = (a + b)r + (a + b) = (ar + br) +$
$+ (a + b) = (ar + a) + (br + b) = ar^+ + br^+$ ■

Fica como exercício a prova de que $a(b + c) = ab + ac$ (usar indução sobre a).

Deixamos de provar as propriedades $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ e $\mathbf{m}_3$ enunciadas no corpo do capítulo, item 2.2. Sugerimos ao leitor tentar demonstrá-las.

$\mathbf{m}_4$ $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$ (*lei do anulamento do produto*)

Vamos supor $b \neq 0$, o que implica $b = r^+$, $r \in \mathbb{N}$. Então:

$$0 = ab = ar^+ = ar + a$$

Daí, como já vimos, $ar = a = 0$. ■

As propriedades $\mathbf{m}_5$ e $\mathbf{m}_6$ serão focalizadas no próximo item.

5. Relação de ordem em $\mathbb{N}$

Já definimos, no item 2.3 (capítulo II), a relação $\leqslant$ (menor que ou igual) em $\mathbb{N}$. Lembremos que $a \leqslant b$ significa $b = a + u$, para algum $u \in \mathbb{N}$. Se $b = a + v$, $v \neq 0$, então se anota $a < b$ (a é menor que b). As relações $\geqslant$ (maior que ou igual) e $>$ (maior que) são definidas, respectivamente, pelas equivalências: "$x \geqslant y \iff y \leqslant x$" e "$x > y \iff y < x$".

5.1 *Propriedades da relação de ordem*

$\mathbf{O}_1$ $a \leqslant a$, $\forall a \in \mathbb{N}$ (*reflexiva*)

Prova: $a = a + 0$ ■

$\mathbf{O}_2$ $a \leqslant b$ e $b \leqslant a \Rightarrow a = b$ (*anti-simétrica*)

Prova: Por hipótese $b = a + u$ e $a = b + v$ $(u, v \in \mathbb{N})$. Donde $a = a + (u + v)$ e, pela lei do cancelamento da adição, $u + v = 0$. Daí $u = v = 0$, como já provamos, e portanto $a = b$. ■

$\mathbf{O}_3$ $a \leqslant b$ e $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$ (*transitiva*)

Exercício

$\mathbf{O}_4$ Para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$.

Prova: Para cada $b \in \mathbb{N}$ seja S_b o subconjunto de $\mathbb{N}$ formado pelos elementos n para os quais se verifica ao menos uma das seguintes condições: (a) existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $b = n + u$; (b) existe $v \in \mathbb{N}$ tal que $n = b + v$. Como para $n = 0$ a sentença (a) se verifica com $u = b$, então $0 \in S_b$. Seja $r \in S_b$. Se $r = b$, então $r^+ = b^+ = b + 1$ e portanto $r^+ \in S_b$, já que verifica (b). Suponhamos agora $b = r + u$, $u \neq 0$; então $u = v^+ = v + 1$, para algum $v \in \mathbb{N}$, e daí $b = r + (v + 1) = r^+ + v$, ou seja, r^+ satisfaz (a) e portanto pertence a S_b. Finalmente, se $r = b + v$, $v \neq 0$, então

$r^+ = (b + v)^+ = b + v^+$, o que significa que $r^+ \in S_b$, pois cumpre a condição (b).

Donde $S_b = \mathbb{N}$ e, por isso, para todo $b \in \mathbb{N}$, qualquer que seja o número natural a, ou $b = a + u$ ou $a = b + v$. Ou seja: $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$. ■

$\mathbf{O}_5$ $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$, $\forall c \in \mathbb{N}$ (*compatibilidade com a adição*)

Exercício

$\mathbf{O}_6$ $a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc$, $\forall c \in \mathbb{N}$ (*compatibilidade com a multiplicação*)

Prova: Por hipótese $b = a + u$, para algum $u \in \mathbb{N}$. Donde $bc = (a + u)c = ac + uc$, do que resulta $ac \leqslant bc$. ■

$\mathbf{O}_7$ $a < b \Rightarrow a + 1 \leqslant b$ (já provada no corpo deste capítulo — item 2)

$\mathbf{O}_8$ *Princípio do menor número natural.* Qualquer que seja o subconjunto não vazio $S \subset \mathbb{N}$, S possui mínimo.

Prova: Seja $H = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant x,\ \forall x \in S\}$. Como $0 \leqslant a$, $\forall a \in S$ $(a = 0 + a)$, então $0 \in H$. Tomemos $a \in S$, o que é possível pois $S \neq \emptyset$. Observando que $a < a + 1$, pode-se afirmar que $a + 1 \notin H$ (se pertencesse, deveria ocorrer $a + 1 \leqslant a$) e portanto $H \neq \mathbb{N}$. Levando em conta $\mathbf{P}_5$, necessariamente existe um elemento $b \in \mathbb{N}$ tal que $b \in H$ e $b + 1 \notin H$ (caso contrário se teria $H = \mathbb{N}$). Mostremos que $b = \min S$. De fato:

- Como $b \in H$, então $b \leqslant x$, $\forall x \in S$.
- Vamos supor que $b \notin S$. Então $b < x$, para todo $x \in S$, e daí $b + 1 \leqslant x$, também para todo $x \in S$, o que implica $b + 1 \in H$. Mas isto é impossível. Esta contradição nos leva a concluir que $b \in S$. ■

Uma pergunta que cabe perfeitamente após a construção axiomática que fizemos de $\mathbb{N}$ é a seguinte: Será que a seqüência formada pelo zero e seus sucessores esgota realmente o conjunto dos números naturais? Será que não pode ocorrer

$$a < r < a^+ = a + 1$$

para algum par de elementos $a, r \in \mathbb{N}$? Mostraremos que não.

Supondo $a < r < a + 1$, então $r = a + u$ $(u \neq 0)$ e $a + 1 = r + v$ $(v \neq 0)$. Portanto

$$a + 1 = a + (u + v)$$

o que implica $u + v = 1$. Considerando que $u \neq 0$, então (proposição 2) $u = r^+ = r + 1$. Assim chegamos a

$$1 = u + v = (r + 1) + v = (r + v) + 1$$

e, portanto, $r + v = 0$. Mas daí decorre, conforme provamos no item 3.1, que $r = v = 0$. Absurdo. Assim, efetivamente, para todo $a \in \mathbb{N}$:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid a < x < a + 1\} = \emptyset$$

5.2 Lei da tricotomia em $\mathbb{N}$

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$ vale uma e uma só das relações: $a = b$, $a < b$ ou $a > b$. De fato, por $\mathbf{O_4}$: $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$. Então $b = a + u$ ou $a = b + v$. Supondo $a \neq b$, devemos ter $u \neq 0$ para a primeira possibilidade e $v \neq 0$ para a segunda. Ou seja: $a \neq b \Rightarrow a < b$ ou $b < a$. Se ocorressem simultaneamente $a < b$ e $b < a$, então $b = a + r\ (r \neq 0)$ e $a = b + s\ (s \neq 0)$. Daí $a = a + (r + s)$. Então $r + s = 0$ e portanto $r = s = 0$. Absurdo. Assim, se $a, b \in \mathbb{N}$, então $a = b$, $a < b$ ou $a > b$, exclusivamente. Esta é chamada *lei da tricotomia* em $\mathbb{N}$.

Provemos a partir dessa observação a propriedade $\mathbf{m_5}$: $ab = ac$, $a \neq 0 \Rightarrow b = c$.

Se $b < c$, então $c = b + v\ (v \neq 0)$. Logo $ab = ac = ab + av$, o que implica $av = 0$. Donde, por $\mathbf{m_4}$, $a = 0$ ou $v = 0$, o que é absurdo. Da mesma forma não pode ocorrer $c < b$.

Vejamos agora como se pode provar $\mathbf{m_6}$: $ab = 1 \Rightarrow a = b = 1$.

Da hipótese decorre que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Logo $a \geqslant 1$ e $b \geqslant 1$. Supondo, por exemplo, $a > 1$, então $a = 1 + v\ (v \neq 0)$. Como $b = 1 + u$ (pois $b \geqslant 1$), podemos concluir que

$$1 = ab = (1 + v)(1 + u) = 1 + u + v + uv$$

o que leva a

$$v + (u + uv) = 0$$

e daí $u + uv = v = 0$, o que não é possível. Donde $a = 1$ e então $b = 1$.

EXERCÍCIOS

144. Se a e b são números naturais e $a + b = 1$, prove que $a = 1$ ou $b = 1$.

145. Sejam a e b números naturais não nulos. Prove que $a \leqslant ab$ e $b \leqslant ab$.

Resolução: Seja $c = ab$. Como $b \neq 0$, então $b \geqslant 1$ e portanto $b = 1 + u\ (u \in \mathbb{N})$. Então $c = ab = a(1 + u) = a + au$, do que resulta $a \leqslant c$.

146. Se a e b são números naturais e se $ab = 3$, prove que $a = 1$ ou $b = 1$.

147. Se a e b são números naturais não nulos e se $a + b = 2$, prove que $a = b = 1$.

148. Se $a + b = 3$, onde a e b são números naturais, não nulos, prove que $a = 1$ ou $b = 1$.

149. Se $ac < bc$ e $c \neq 0$, prove que $a < b$.

Resolução: Vamos supor $a \geqslant b$, o que se traduz por $a = b + u$, para algum $u \in \mathbb{N}$. Então $ac = (b + u)c = bc + uc$. Donde $bc \leqslant ac$, o que contraria a hipótese.

150. Se $a + c < b + c$, prove que $a < b$.

151. Se $a \leqslant b$, prove que: $c < b - a \iff c + a < b$.

152. Se $a < b$, prove que: $a^n < b^n$, para todo $n \geqslant 1$.

Sugestão: Use indução sobre n e lembre que, por definição, $a^0 = 1$ e $a^{n+1} = a^n \cdot a\ (n \geqslant 0;\ a \neq 0)$.

153. Prove que para todo $n \geqslant 1$, $n = 1 + 1 + \ldots + 1$ (n parcelas).