1^{a} Prova de Análise no $\mathbb{R}^n$ – 30/4/2019 -

1. Considere o conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (y + x^2)(x + 1) = 0\}$.
   (a) E é aberto?
   (b) E é fechado?
   (c) E é compacto?
   (d) E é convexo?
   (e) E é conexo?
   (f) Se $p \in \mathbb{R}^2$, quantas componentes conexas possui $E \setminus \{p\}$?

2. Seja $T \in L(\mathbb{R}^n)$ um operador linear qualquer e $I \in L(\mathbb{R}^n)$ a identidade. Mostre que:
   (a) Se $\|T - I\| < 1$ então T é invertível;
   (b) Se existe $\mu > 0$ tal que $\|Tx\| \geqslant \mu\|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então T é invertível e $\|T\| \leqslant \mu^{-1}$.

3. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto arbitrário:
   (a) Se K não é compacto, mostre que existe uma função contínua não limitada $f : K \to \mathbb{R}$;
   (b) Se K é compacto e $f : K \to \mathbb{R}^m$ contínua, mostre que $f(K)$ é compacto;
   (c) Se K é compacto e $f : K \to \mathbb{R}^m$ é contínua, mostre que f é uniformemente contínua.

4. Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em $\mathbb{R}^n$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
   (a) $\lim_{k\to\infty} |x_k| = +\infty$;
   (b) (x_k) não possui subsequência convergente;
   (c) Qualquer conjunto limitado $B \subset \mathbb{R}^n$ contém apenas uma quantidade finita de termos da sequência (x_k).

5. Sejam $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| = 1\}$ e $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}$. Mostre que:
   (a) $\mathbb{S}^1$ não homeomorfo a nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$;
   (b) $\mathbb{S}^1$ não homeomorfo a $\mathbb{S}^2$.

6. Seja A um subconjunto de de $\mathbb{R}^n$. Mostre que:
   (a) se $A \neq \varnothing$ é aberto e conexo então é A é conexo por caminhos (c.p.c.);
   (b) se A é c.p.c. e $f : A \to \mathbb{R}^m$ é contínua, então $f(A)$ é c.p.c.