

1ª Prova de Fundamentos de Análise - 27/07/2022

Essa prova é composta de duas partes:

Parte 1: Entregue 4 questões resolvidas até às 21h. Faça apenas uma questão de cada seção abaixo.

Parte 2: Envie a resolução de todas as questões até às 24h de domingo, 31/07, para o endereço: fundamentos.analise.ufpr@gmail.com

Números Naturais e Inteiros

1. Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, prove que $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.
2. Usando indução prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Números Racionais e Irracionais

3. Prove que o número $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ é irracional;
4. Dado $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ se e somente se n é um quadrado perfeito

Conjuntos finitos e enumeráveis

5. Mostre que todo conjunto que contém apenas números naturais é enumerável.
6. (a) Mostre que o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n); m, n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável;
(b) Use o resultado acima para provar que o conjunto \mathbb{Q} é enumerável.

Corpo dos números reais

7. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado. Mostre que:
 - (a) o conjunto $-A = \{-a; a \in A\}$ é limitado;
 - (b) $\sup(-A) = -\inf(A)$.
8. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que:
 - (a) Se $a \cdot b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.
 - (b) $(-a) \cdot b = a \cdot b = -(a \cdot b)$;