

1ª Prova de Fundamentos de Análise - 27/07/2022

Essa prova é composta de duas partes:

Parte 1: Entregue 4 questões resolvidas até às 17h30. Faça apenas uma questão de cada seção abaixo.

Parte 2: Envie a resolução de todas as questões até às 24h de domingo, 31/07, para o endereço: fundamentos.analise.ufpr@gmail.com

Números Naturais e Inteiros

1. Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$ números não nulos. Prove que $a \leq ab$ e que $b \leq ab$.
2. Usando indução prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ tem-se
$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Números Racionais e Irracionais

3. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Mostre que:
 - (a) $a + b\sqrt{5}$ é um número irracional;
 - (b) $a + b\sqrt{5} = c + d\sqrt{5} \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$
 - (c) O conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ é fechado em relação a multiplicação usual de números reais.
4. Se a representação decimal de um número racional possui apenas uma quantidade finita de casas decimais, mostre que este número pode ser escrito na forma a/b , sendo b um número inteiro positivo cuja decomposição em fatores primos possui apenas os fatores 2 e 5.

Conjuntos finitos e enumeráveis

5. Mostre que todo conjunto infinito contém um subconjunto enumerável.
6.
 - (a) Mostre que o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n); m, n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável;
 - (b) Use o resultado acima para provar que o conjunto \mathbb{Q} é enumerável.

Corpo dos números reais

7. Sejam $A, B \subset [0, +\infty)$ conjuntos limitados não vazios. Mostre que:
 - (a) o conjunto $A \cdot B = \{a \cdot b; a \in A \text{ e } b \in B\}$ é limitado;
 - (b) $\sup(A \cdot B) \leq (\sup A) \cdot (\sup B)$
8. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que:
 - (a) Se $a \cdot b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$;
 - (b) Se $a > 0$ então $a^{-1} > 0$;