3

Seqüências de Números Reais

Neste capítulo será apresentada a noção de limite sob sua forma mais simples, o limite de uma seqüência. A partir daqui, todos os conceitos importantes da Análise, de uma forma ou de outra, reduzir-se-ão a algum tipo de limite.

1 Limite de uma seqüência

Uma *seqüência* de números reais é uma função $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado o *n-ésimo termo* da seqüência.

Escreve-se $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n), para indicar a seqüência cujo n-ésimo termo é x_n.

Não se confunda a seqüência (x_n) com o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ dos seus termos. Por exemplo, a seqüência $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ não é o mesmo que o conjunto $\{1\}$. Ou então: as seqüências $(0, 1, 0, 1, \ldots)$ e $(0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots)$ são diferentes mas o conjunto dos seus termos é o mesmo, igual a $\{0, 1\}$.

Uma seqüência (x_n) diz-se *limitada superiormente* (respectivamente *inferiormente*) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a seqüência (x_n) é *limitada* quando ela é limitada superior e inferiormente. Isto equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1. Se $a > 1$ então a seqüência $(a, a^2, \ldots, a^n, \ldots)$ é limitada inferiormente porém não superiormente. Com efeito, multiplicando ambos os membos da desigualdade $1 < a$ por a^n obtemos $a^n < a^{n+1}$. Segue-se que $a < a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo (a^n) é limitada inferiormente por a. Por outro lado, temos $a = 1 + d$, com $d > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, para todo $n > 1$ em $\mathbb{N}$ vale $a^n \geq 1 + nd$. Portanto, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$ podemos obter $a^n > c$ desde que tomemos $1 + nd > c$, isto é, $n > (c-1)/d$.

Dada uma seqüência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma *subseqüência* de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$, ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ para indicar a subseqüência $x' = x|\mathbb{N}'$. A notação $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mostra como uma subseqüência pode ser considerada como uma seqüência, isto é, uma função cujo domínio é $\mathbb{N}$.

Lembremos que $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, é ilimitado, isto é, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}'$ com $n_k > n_0$.

Exemplo 2. Dado o número real $a < -1$, formemos a seqüência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números pares e $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos número ímpares então a subseqüência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}'}$ é limitada apenas inferiormente enquanto a subseqüência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}''}$ é limitada apenas superiormente.

Diz-se que o número real a é *limite* da seqüência (x_n) quando, para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$. Escreve-se então $a = \lim x_n$.

Esta importante definição significa que, para valores muito grandes de n, os termos x_n tornam-se e se mantêm tão próximos de a quanto se deseje. Mais precisamente, estipulando-se uma margem de erro $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n da seqüência com índice $n > n_0$ são valores aproximados de a com erro menor do que ε.

Simbolicamente, escreve-se:

$$a = \lim x_n \quad .\equiv. \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N};\ \ n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Acima, o símbolo $.\equiv.$ significa que o que vem depois é a definição do que vem antes. $\forall$ significa "para todo" ou "qualquer que seja". $\exists$ significa "existe". O ponto-e-vírgula quer dizer "tal que" e a seta $\Rightarrow$ significa "implica".

Convém lembrar que $|x_n - a| < \varepsilon$ é o mesmo que $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, isto é, x_n pertence ao intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Assim, dizer que $a = \lim x_n$ significa afirmar que qualquer intervalo aberto de centro a contém todos os termos x_n da seqüência, salvo para um número finito de índices n (a saber, os índices $n \leq n_0$, onde n_0 é escolhido em função do raio ε do intervalo dado).

Em vez de $a = \lim x_n$, escreve-se também $a = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $a = \lim_{n \to \infty} x_n$ ou $x_n \to a$. Esta última expressão lê-se "x_n tende para a" ou "converge para a". Uma seqüência que possui limite diz-se *convergente*. Caso contrário, ela se chama *divergente*.

Teorema 1. (Unicidade do limite.) *Uma seqüência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração: Seja $\lim x_n = a$. Dado $b \neq a$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos abertos $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $J = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ sejam disjuntos. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in I$. Então, para todo $n > n_0$, temos $x_n \notin J$. Logo não é $\lim x_n = b$. $\square$

Teorema 2. *Se* $\lim x_n = a$ *então toda subseqüência de* (x_n) *converge para o limite* a.

Demonstração: Seja $(x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ a subseqüência. Dado qualquer intervalo aberto I de centro a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n, com $n > n_0$, pertencem a I. Em particular, todos os termos x_{n_k}, com $n_k > n_0$ também pertencem a I. Logo $\lim x_{n_k} = a$. $\square$

Teorema 3. *Toda seqüência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $a = \lim x_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - 1, a + 1)$. Sejam b o menor e c o maior elemento do conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_{n_0}, a - 1, a + 1\}$. Todos os termos x_n da seqüência estão contidos no intervalo $[b, c]$, logo ela é limitada. $\square$

Exemplo 3. A seqüência $(2, 0, 2, 0, \ldots)$, cujo n-ésimo termo é $x_n = 1 + (-1)^{n+1}$, é limitada mas não é convergente porque possui duas subseqüências constantes, $x_{2n-1} = 2$ e $x_{2n} = 0$, com limites distintos.

Exemplo 4. A seqüência $(1, 2, 3, \ldots)$, com $x_n = n$, não converge porque não é limitada.

Uma seqüência (x_n) chama-se *monótona* quando se tem $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou então $x_{n+1} \leq x_n$ para todo n. No primeiro caso, diz-se que (x_n) é *monótona não-decrescente* e, no segundo, que (x_n) é *monótona não-crescente*. Se, mais precisamente, tivermos $x_n < x_{n+1}$ (respect. $x_n > x_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$, diremos que a seqüência é *crescente* (respectivamente, *decrescente*).

Toda seqüência monótona não-decrescente (respect. não-crescente) é limitada inferiormente (respect. superiormente) pelo seu primeiro termo. A fim de que ela seja limitada é suficiente que possua uma subseqüência limitada. Com efeito, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ uma subseqüência limitada da seqüência monótona (digamos, não-decrescente) (x_n). Temos $x_{n'} \le c$ para todo $n' \in \mathbb{N}'$. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $n' \in \mathbb{N}'$ tal que $n < n'$. Então $x_n \le x_{n'} \le c$.

O teorema seguinte dá uma condição suficiente para que uma seqüência convirja. Foi tentando demonstrá-lo ao preparar suas aulas, na metade do século 19, que R. Dedekind percebeu a necessidade de uma conceituação precisa de número real.

Teorema 4. *Toda seqüência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) monótona, digamos não-decrescente, limitada. Escrevamos $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ e $a = \sup X$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \le a$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \le x_n < a + \varepsilon$ e daí $\lim x_n = a$. □

Semelhantemente, se (x_n) é não-crescente, limitada então $\lim x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores x_n.

Corolário. (Teorema de Bolzano-Weierstrass.) *Toda seqüência limitada de números reais possui uma subseqüência convergente.*

Com efeito, basta mostrar que toda seqüência (x_n) possui uma subseqüência monótona. Diremos que um termo x_n da seqüência dada é *destacado* quando $x_n \ge x_p$ para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Se D for um conjunto infinito, $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$, então a subseqüência $(x_n)_{n\in D}$ será monótona não-crescente. Se, entretanto, D for finito seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior do que todos os $n \in D$. Então x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Por sua vez, x_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Prosseguindo, obtemos uma subseqüência crescente $x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$. □

Exemplo 5. A seqüência cujo n-ésimo termo é $x_n = 1/n$ é monótona, decrescente, limitada. Temos então $\lim 1/n = \inf\{1/n; n \in \mathbb{N}\} = 0$, pelo Teorema 3, Capítulo 2.

Exemplo 6. Seja $0 < a < 1$. A seqüência $(a, a^2, \ldots, a^n, \ldots)$, formada pelas potências sucessivas de a, é decrescente, limitada pois multiplicando $0 < a < 1$ por a^n resulta $0 < a^{n+1} < a^n$. Afirmamos que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, como $1/a > 1$ segue-se do Exemplo 1 que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(1/a)^{n_0} > 1/\varepsilon$, ou seja, $a^{n_0} < \varepsilon$. Segue-se que $\lim a^n = \inf\{a^n; n \in \mathbb{N}\} = 0$.

2 Limites e desigualdades

Seja P uma propriedade referente aos termos de uma seqüência (x_n). Diremos que "para todo n suficientemente grande x_n goza da propriedade P" para significar que "existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n$ goza da propriedade P".

Teorema 5. *Seja $a = \lim x_n$. Se $b < a$ então, para todo n suficientemente grande, tem-se $b < x_n$. Analogamente, se $a < b$ então $x_n < b$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração: Tomando $\varepsilon = a - b$, temos $\varepsilon > 0$ e $b = a - \varepsilon$. Pela definição de limite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow b < x_n$. A outra afirmação se prova analogamente. □

Corolário 1. *Seja $a = \lim x_n$. Se $a > 0$ então, para todo n suficientemente grande, tem-se $x_n > 0$. Analogamente, se $a < 0$ então $x_n < 0$ para todo n suficientemente grande.*

Corolário 2. *Sejam $a = \lim x_n$ e $b = \lim y_n$. Se $x_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande então $a \leq b$. Em particular se $x_n \leq b$ para todo n suficientemente grande então $\lim x_n \leq b$.*

Com efeito, se fosse $b < a$ então tomaríamos $c \in \mathbb{R}$ tal que $b < c < a$ e teríamos, pelo Teorema 5, $y_n < c < x_n$ para todo n suficientemente grande, contradizendo a hipótese. □

Observação. Se fosse $x_n < y_n$ não se poderia concluir $a < b$. Basta tomar $x_n = 0$, $y_n = 1/n$.

Teorema 6. **(Teorema do sanduíche.)** *Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande então $\lim z_n = a$.*

Demonstração: Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ e $n > n_2 \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \Rightarrow z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, logo $\lim z_n = a$. □

3 Operações com limites

Teorema 7. *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma seqüência limitada* (*convergente ou não*) *então* $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$.

Demonstração: Existe $c > 0$ tal que $|y_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon/c$. Então $n > n_0 \Rightarrow |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < (\varepsilon/c) \cdot c = \varepsilon$, logo $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$. □

Exemplo 7. Se $x_n = 1/n$ e $y_n = \operatorname{sen}(n)$ então (y_n) não converge mas, como $-1 \leq y_n \leq 1$, tem-se $\lim(x_n y_n) = \lim(\operatorname{sen}(n)/n) = 0$. Por outro lado, se $\lim x_n = 0$ mas y_n não é limitada, o produto $x_n \cdot y_n$ pode divergir (tome $x_n = 1/n$, $y_n = n^2$) ou convergir para um valor qualquer (tome $x_n = 1/n$ e $y_n = c \cdot n$).

Para uso posterior, observemos que, segundo resulta diretamente da definição de limite, tem-se

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \lim(x_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n - a| = 0.$$

Teorema 8. *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$ *então:*

1. $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$.
2. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.
3. $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ *se* $b \neq 0$.

Demonstração: 1. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon/2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$, logo $|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Portanto $\lim(x_n + y_n) = a + b$. Mesmo argumento para $x_n - y_n$.

2. Temos $x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b$. Pelo Teorema 3, (x_n) é limitada. Além disso, $\lim(y_n - b) = \lim(x_n - a) = 0$. Segue-se do Teorema 7 e da parte 1. que $\lim(x_n y_n - ab) = \lim[x_n(y_n - b)] + \lim[(x_n - a) \cdot b] = 0$, donde $\lim(x_n y_n) = ab$.

3. Vale $x_n/y_n - a/b = (x_n b - y_n a)/y_n b$. Como $\lim(x_n b - y_n a) = ab - ba = 0$, basta provar que $(1/y_n b)$ é uma seqüência limitada para concluir que $\lim(x_n/y_n - a/b) = 0$ e portanto que $\lim(x_n/y_n) = a/b$. Ora, pondo $c = b^2/2$, temos $0 < c < b^2$. Como $\lim y_n b = b^2$, segue-se do Teorema 5 que, para todo n suficientemente grande, tem-se $c < y_n b$ e portanto $1/y_n b < 1/c$, completando a demonstração. $\square$

Exemplo 8. Se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim(x_{n+1}/x_n) = a < 1$ então $\lim x_n = 0$. Com efeito, tomemos $c \in \mathbb{R}$ com $a < c < 1$. Então $0 < x_{n+1}/x_n < c$ para todo n suficientemente grande. Segue-se que $0 < x_{n+1} = (x_{n+1}/x_n)x_n < c \cdot x_n < x_n$ logo, para n suficientemente grande, a seqüência (x_n) é monótona limitada. Seja $b = \lim x_n$. De $x_{n+1} < c \cdot x_n$ para todo n suficientemente grande resulta, fazendo $n \to \infty$, que $b \leq c \cdot b$, isto é, $(1 - c) \cdot b \leq 0$. Como $b \geq 0$ e $0 < c < 1$, concluímos que $b = 0$.

Exemplo 9. Como aplicação do exemplo anterior, vê-se que, se $a > 1$ e $k \in \mathbb{N}$ são constantes então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Com efeito, pondo $x_n = n^k/a^n$, $y_n = a^n/n!$ e $z_n = n!/n^n$ vem $y_{n+1}/y_n = a/(n+1)$, logo $\lim(y_{n+1}/y_n) = 0$ e, pelo Exemplo 8, $\lim y_n = 0$. Temos também $x_{n+1}/x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot a^{-1}$, portanto (pelo Teorema 8) $\lim(x_{n+1}/x_n) = 1/a < 1$. Segue-se do Exemplo 8 que $\lim x_n = 0$. Finalmente, $z_{n+1}/z_n = [n/(n+1)]^n$, donde $\lim(z_{n+1}/z_n) = 1/e$. (Veja Exemplo 13, abaixo.) Como $1/e < 1$, segue-se que $\lim z_n = 0$.

Exemplo 10. Dado $a > 0$, mostremos que a seqüência dada por $x_n = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ tem limite igual a 1. Com efeito, trata-se de uma seqüência monótona (decrescente se $a > 1$, crescente se $a < 1$), limitada, portanto existe $L = \lim_{n\to\infty} a^{1/n}$. Tem-se $L > 0$. Com efeito, se $0 < a < 1$ então $a^{1/n} > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $L \geq a$. Se, porém, $a > 1$ então $a^{1/n} > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $L \geq 1$. Consideremos a subseqüência $(a^{1/n(n+1)}) = (a^{1/2}, a^{1/6}, a^{1/12}, \ldots)$. Como $1/n(n+1) = 1/n - 1/(n+1)$, o Teorema 2 e o item 3 do Teorema 8 nos dão

$$L = \lim a^{1/n(n+1)} = \lim \frac{a^{1/n}}{a^{1/(n+1)}} = \frac{L}{L} = 1.$$

Exemplo 11. Seja $0 < a < 1$. A seqüência cujo termo geral é $x_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = (1 - a^{n+1})/(1 - a)$ é crescente, limitada, pois

$x_n < 1/(1-a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $\lim_{n\to\infty}(1/(1-a)-x_n) = \lim_{n\to\infty} a^{n+1}/(1-a) = 0$, portanto $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(1+a+\cdots+a^n) = 1/(1-a)$.

A igualdade acima vale ainda quando se tem $-1 < a < 1$, isto é, $|a| < 1$. Com efeito, o argumento se baseou no fato de que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, que persiste quando se tem apenas $|a| < 1$, pois $\lim |a|^n = 0 \Leftrightarrow \lim a^n = 0$.

Exemplo 12. A seqüência cujo termo geral é

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

é evidentemente crescente. Ela também é limitada pois

$$2 \leq a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Escreveremos $e = \lim a_n$. O número e é uma das constantes mais importantes da Análise Matemática. Como vimos, tem-se $2 < e \leq 3$. Na realidade, vale $e = 2,7182$, com quatro decimais exatas.

Exemplo 13. Consideremos a seqüência cujo termo geral é $b_n = (1+1/n)^n = [(n+1)/n]^n$. Pela fórmula do binômio:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \frac{n\cdot 1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!}\,\frac{1}{n^n} \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)+\frac{1}{3!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)+\cdots+\frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\ldots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big). \end{aligned}$$

Logo b_n é uma soma de parcelas positivas. O número dessas parcelas, bem como cada uma delas, cresce com n. Portanto a seqüência (b_n) é crescente. É claro que $b_n < a_n$. (Ver Exemplo 12.) Segue-se que $b_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $\lim b_n = \lim a_n = e$. Com efeito, quando $n > p$ vale

$$b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{p!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\ldots\Big(1-\frac{p-1}{n}\Big).$$

Fixando arbitrariamente $p \in \mathbb{N}$ e fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima obtemos $\lim_{n\to\infty} b_n \geq 1 + 1 + 1/2! + \cdots + 1/p! = a_p$. Como esta desigualdade vale para todo $p \in \mathbb{N}$, segue-se que $\lim_{n\to\infty} b_n \geq \lim_{p\to\infty} a_p = e$. Mas já vimos que $b_n < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $\lim b_n \leq \lim a_n$. Isto completa a prova de que $\lim b_n = e$.

Exemplo 14. Consideremos a seqüência cujo n-ésimo termo é $x_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$. Temos $x_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta seqüência é decrescente a partir do seu terceiro termo. Com efeito, a desigualdade $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ é equivalente a $n^{n+1} > (n+1)^n$, isto é, a $n > (1+1/n)^n$, o que é verdade para $n \geq 3$ pois, como vimos acima, $(1+1/n)^n < 3$ para todo n. Portanto existe $L = \lim n^{1/n}$ e tem-se $L \geq 1$. Considerando a subseqüência $(2n)^{1/2n}$ temos:

$$L^2 = \lim[(2n)^{1/2n}]^2 = \lim[2^{1/n} \cdot n^{1/n}] = \lim 2^{1/n} \cdot \lim n^{1/n} = L$$

(Cfr. Exemplo 10.) Como $L \neq 0$, de $L^2 = L$ resulta $L = 1$. Concluímos portanto que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Exemplo 15 (*Aproximações sucessivas da raiz quadrada.*) O seguinte método iterativo para obter, com erro tão pequeno quanto se deseje, valores aproximados para a raiz quadrada de um dado número real $a > 0$, já era conhecido pelos babilônios 17 séculos antes da era cristã. Toma-se arbitrariamente um valor inicial $x_1 > \sqrt{a}$ e define-se indutivamente $x_{n+1} = [x_n + a/x_n]/2$. Para mostrar que a seqüência (x_n) assim obtida converge para $\sqrt{a}$, começamos observando que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a} < x \Rightarrow (a/x) < \sqrt{a} < x$. (Multiplique ambos os membros da desigualdade $\sqrt{a} < x$ por $\sqrt{a}$.) Em seguida notemos que, pondo $y = [x + a/x]/2$, y é a média aritmética dos números a/x e x, logo é menor do que x e maior do que a média geométrica desses números, que é $\sqrt{a}$. Logo $\sqrt{a} < y < x$. Portanto temos uma seqüência decrescente

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots,$$

cujos termos são todos maiores do que $\sqrt{a}$. Esta seqüência converge para um número real c. Fazendo $n \to \infty$ na igualdade $x_{n+1} = [x_n + a/x_n]/2$ obtemos $c = [c + a/c]/2$, donde $c^2 = a$, isto é, $\lim x_n = \sqrt{a}$. Vemos então que todo número real $a > 0$ possui uma raiz quadrada real. Mais ainda, o processo iterativo $x_{n+1} = [x_n + a/x_n]/2$ fornece rapidamente boas aproximações para $\sqrt{a}$, como se pode verificar tomando exemplos concretos.

4 Limites infinitos

Dada uma seqüência (x_n), diz-se que "o limite de x_n é mais infinito" e escreve-se $\lim x_n = +\infty$, para significar que, dado arbitrariamente $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n > A$.

Analogamente, $\lim x_n = -\infty$ significa que, para todo $A > 0$ dado, pode-se achar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < -A$.

Deve-se enfatizar que $+\infty$ e $-\infty$ não são números e que, se $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$, as seqüências (x_n) e (y_n) não são convergentes.

Como $\lim x_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-x_n) = -\infty$, limitaremos nossos comentários ao primeiro caso.

Se $\lim x_n = +\infty$ então a seqüência (x_n) não é limitada superiormente. A recíproca é falsa. A seqüência dada por $x_n = n + (-1)^n n$ é ilimitada superiormente porém não se tem $\lim x_n = +\infty$, pois $x_{2n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas se (x_n) é não-decrescente então (x_n) ilimitada $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$.

No Exemplo 1, ao mostrar que as potências $a, a^2, a^3, \ldots$ de um número $a > 1$ formam uma seqüência ilimitada superiormente, provou-se, na realidade, que $\lim a^n = +\infty$.

Teorema 9.

(1) *Se* $\lim x_n = +\infty$ *e* (y_n) *é limitada inferiormente então* $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

(2) *Se* $\lim x_n = +\infty$ *e existe* $c > 0$ *tal que* $y_n > c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então* $\lim(x_n y_n) = +\infty$.

(3) *Se* $x_n > c > 0$, $y_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim y_n = 0$ *então* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$.

(4) *Se* (x_n) *é limitada e* $\lim y_n = +\infty$ *então* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

Demonstração: (1) Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $y_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > A - c$. Segue-se que $n > n_0 \Rightarrow x_n + y_n > A - c + c = A$, logo $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

(2) Dado arbitrariamente $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > A/c$. Logo $n > n_0 \Rightarrow x_n y_n > (A/c) \cdot c = A$, donde $\lim(x_n y_n) = +\infty$.

(3) Dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n < c/A$. Então $n > n_0 \Rightarrow x_n/y_n > c \cdot A/c = A$ e daí $\lim(x_n/y_n) = +\infty$.

(4) Existe $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n > c/\varepsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow |x_n/y_n| < c \cdot \varepsilon/c = \varepsilon$, logo $\lim(x_n/y_n) = 0$.

As hipóteses feitas nas diversas partes do teorema anterior têm por objetivo evitar algumas das chamadas "expressões indeterminadas". No item (1) procura-se evitar a expressão $+\infty-\infty$. De fato, se $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$ nenhuma afirmação geral pode ser feita sobre $\lim(x_n + y_n)$. Este limite pode não existir (como no caso em que $x_n = n + (-1)^n$ e $y_n = -n$), pode ser igual a $+\infty$ (se $x_n = 2n$ e $y_n = -n$), pode ser $-\infty$ (tome $x_n = n$ e $y_n = -2n$) ou pode assumir um valor arbitrário $c \in \mathbb{R}$ (por exemplo, se $x_n = n + c$ e $y_n = -n$). Por causa desse comportamento errático, diz-se que $+\infty - \infty$ é uma expressão indeterminada. Nos itens (2), (3) e (4), as hipóteses feitas excluem os limites do tipo $0 \times \infty$ (também evitado no Teorema 7), $0/0$ e ∞/∞, respectivamente, os quais constituem expressões indeterminadas no sentido que acabamos de explicar. Outras expressões indeterminadas freqüentemente encontradas são ∞^0, 1^∞ e 0^0.

Os limites mais importantes da Análise quase sempre se apresentam sob forma de uma expressão indeterminada. Por exemplo, o número $e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ é da forma 1^∞. E, como veremos mais adiante, a derivada é um limite do tipo $0/0$.

Agora, uma observação sobre ordem de grandeza. Se $k \in \mathbb{N}$ e a é um número real > 1 então $\lim_{n\to\infty} n^k = \lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} n! = \lim_{n\to\infty} n^n$. Todas estas seqüências têm limite infinito. Mas o Exemplo 9 nos diz que, para valores muito grandes de n temos $n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$, onde o símbolo $\ll$ quer dizer "é uma fração muito pequena de" ou "é insignificante diante de". Por isso diz-se que o crescimento exponencial supera o polinomial, o crescimento fatorial supera o exponencial com base constante mas é superado pelo crescimento exponencial com base ilimitadamente crescente. Por outro lado, o crescimento de n^k (mesmo quando $k = 1$) supera o crescimento logarítmico, como mostraremos agora.

No Capítulo 11 provaremos a existência de uma função crescente $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que $\log(xy) = \log x + \log y$ e $\log x < x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Daí resulta que $\log x = \log(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = 2\log\sqrt{x}$, donde $\log\sqrt{x} = (\log x)/2$. Além disso, $\log x = \log(1 \cdot x) = \log 1 + \log x$, donde $\log 1 = 0$. Como log é crescente, tem-se $\log x > 0$ para todo $x > 1$. Vale também $\log(2^n) = n \cdot \log 2$, portanto $\lim_{n\to\infty} \log(2^n) = +\infty$. Como log é crescente, segue-se $\lim_{n\to\infty} \log n = +\infty$.

Provaremos agora que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\log \sqrt{n} < \sqrt{n}$. Como $\log \sqrt{n} = \frac{1}{2} \log n$, segue-se que $\log n < 2\sqrt{n}$. Dividindo por n resulta que $0 < \log n/n < 2/\sqrt{n}$. Fazendo $n \to \infty$ vem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$.

5 Exercícios

Seção 1: Limite de uma seqüência

1. Uma seqüência (x_n) diz-se *periódica* quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+p} = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que toda seqüência periódica convergente é constante.
2. Dadas as seqüências (x_n) e (y_n), defina (z_n) pondo $z_{2n-1} = x_n$ e $z_{2n} = y_n$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim z_n = a$.
3. Se $\lim x_n = a$, prove que $\lim |x_n| = |a|$.
4. Se uma seqüência monótona tem uma subseqüência convergente, prove que a seqüência é, ela própria, convergente.
5. Um número a chama-se *valor de aderência* da seqüência (x_n) quando é limite de uma subseqüência de (x_n). Para cada um dos conjuntos A, B e C abaixo ache uma seqüência que o tenha como conjunto dos seus valores de aderência. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \mathbb{N}$, $C = [0, 1]$.
6. A fim de que o número real a seja valor de aderência de (x_n) é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$ dados, exista $n > k$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$.
7. A fim de que o número real b não seja valor de aderência da seqüência (x_n) é necessário e suficiente que existam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tais que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - b| \geq \varepsilon$.

Seção 2: Limites e desigualdades

1. Se $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ e $|x_n - y_n| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, prove que $|a - b| \geq \varepsilon$.
2. Sejam $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$. Se $a < b$, prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < y_n$.
3. Se o número real a não é o limite da seqüência limitada (x_n), prove que alguma subseqüência de (x_n) converge para um limite $b \neq a$.

4. Prove que uma seqüência limitada converge se, e somente se, possui um único valor de aderência.
5. Quais são os valores de aderência da seqüência (x_n) tal que $x_{2n-1} = n$ e $x_{2n} = 1/n$? Esta seqüência converge?
6. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, defina indutivamente as seqüências (x_n) e (y_n) pondo $x_1 = \sqrt{ab}$, $y_1 = (a+b)/2$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = (x_n + y_n)/2$. Prove que (x_n) e (y_n) convergem para o mesmo limite.
7. Diz-se que (x_n) é uma *seqüência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.
   (a) Prove que toda seqüência de Cauchy é limitada.
   (b) Prove que uma seqüência de Cauchy não pode ter dois valores de aderência distintos.
   (c) Prove que uma seqüência (x_n) é convergente se, e somente se, é de Cauchy.

Seção 3: Operações com limites

1. Prove que, para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+p]{n} = 1$.
2. Se existem $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $\varepsilon \leq x_n \leq n^k$ para todo n suficientemente grande, prove que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$. Use este fato para calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+k}$, $\lim \sqrt[n]{n+\sqrt{n}}$, $\lim \sqrt[n]{\log n}$ e $\lim \sqrt[n]{n \log n}$.
3. Dado $a > 0$, defina indutivamente a seqüência (x_n) pondo $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. Prove que (x_n) é convergente e calcule seu limite
$$L = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}}$$
4. Seja $e_n = (x_n - \sqrt{a})/\sqrt{a}$ o *erro relativo* na n-ésima etapa do cálculo de $\sqrt{a}$. Prove que $e_{n+1} = e_n^2/2(1+e_n)$. Conclua que $e_n \leq 0,01 \Rightarrow e_{n+1} \leq 0,00005 \Rightarrow e_{n+2} \leq 0,0000000125$ e observe a rapidez de convergência do método.
5. Dado $a > 0$, defina indutivamente a seqüência (x_n) pondo $x_1 = 1/a$ e $x_{n+1} = 1/(a + x_n)$. Considere o número c, raiz positiva da equação $x^2 + ax - 1 = 0$, único número positivo tal que $c = 1/(a+c)$. Prove que
$$x_2 < x_4 < \cdots < x_{2n} < \cdots < c < \cdots < x_{2n-1} < \cdots < x_3 < x_1\,,$$

e que $\lim x_n = c$. O número c pode ser considerado como a soma da *fração contínua*

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cdots}}}}$$

6. Dado $a > 0$, defina indutivamente a seqüência (y_n), pondo $y_1 = a$ e $y_{n+1} = a + 1/y_n$. Mostre que $\lim y_n = a + c$, onde c é como no exercício anterior.
7. Defina a seqüência (a_n) indutivamente, pondo $a_1 = a_2 = 1$ e $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escreva $x_n = a_n/a_{n+1}$ e prove que $\lim x_n = c$, onde c é o único número positivo tal que $1/(c+1) = c$. O termo a_n chama-se o n-ésimo *número de Fibonacci* e $c = (-1+\sqrt{5})/2$ é o *número de ouro* da Geometria Clássica.

Seção 4: Limites infinitos

1. Prove que $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$.
2. Se $\lim x_n = +\infty$ e $a \in \mathbb{R}$, prove que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{\log(x_n + a)} - \sqrt{\log x_n}\right] = 0.$$

3. Dados $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$, determine o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^k \cdot a^n}.$$

Supondo $a > 0$ e $a \neq e$ calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^k \cdot a^n \cdot n!}{n^n}.$$

(Para o caso $a = e$, ver exercício 9, seção 1, capítulo 11.)

4. Mostre que $\lim_{n\to\infty} \log(n+1)/\log n = 1$.

5. Sejam (x_n) uma seqüência arbitrária e (y_n) uma seqüência crescente, com $\lim y_n = +\infty$. Supondo que $\lim(x_{n+1}-x_n)/(y_{n+1}-y_n) = a$, prove que $\lim x_n/y_n = a$. Conclua que se $\lim(x_{n+1}-x_n) = a$ então $\lim x_n/n = a$. Em particular, de $\lim \log(1+1/n) = 0$, conclua que $\lim(\log n)/n = 0$.
6. Se $\lim x_n = a$ e (t_n) é uma seqüência de números positivos com

$$\lim(t_1 + \cdots + t_n) = +\infty,$$

prove que

$$\lim \frac{t_1x_1 + \cdots + t_nx_n}{t_1 + \cdots + t_n} = a.$$

Em particular, se $y_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, tem-se ainda $\lim y_n = a$.