Apêndice D

Construção do corpo dos número reais

Cortes de Dedekind

Como foi mencionado na seção 5.1, o matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916) introduziu o conceito de número real inspirando-se na teoria das razões iguais de Eudóxio. Por uma questão de simplicidade, a definição de número real a ser dada aqui não é exatamente a de Dedekind – mas é equivalente e, no aspecto formal, está bem próxima da original.

Definição 1

Um conjunto $K \subset \mathbb{Q}$ é chamado de *corte* em $\mathbb{Q}$ se

i) $K \neq \varnothing$ e $K \neq \mathbb{Q}$.

ii) Se $x \in K$ e $y < x$, então $y \in K$.

iii) Se $x \in K$, existe $y \in K$ tal que $y > x$.[NA]

Exemplo 1: Se a é um número racional, então o seguinte conjunto é um corte em $\mathbb{Q}$:

$$K(a) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}.$$

Obviamente $K(a) \neq \varnothing$ e $K(a) \neq \mathbb{Q}$. Ademais, se $x \in K(a)$ e $y < x < a$, então $y < a$ e, portanto, $y \in K(a)$. Por fim, se $x \in K(a)$, então $x < a$.

NA Na verdade, Dedekind definiu *corte* no conjunto dos números racionais como uma subdivisão de $\mathbb{Q}$ em dois subconjuntos A e B tais que: a) Se $x \in A$ e $y \in B$, então $x < y$; b) o conjunto A não tem máximo e o conjunto B não tem mínimo; c) as duas classes compreendem, exclusivamente, todos os números racionais ou todos menos um, situado entre elas.

Como o corpo $\mathbb{Q}$ é denso, existe $y \in \mathbb{Q}$ tal que $x < y < a$. O fato de y pertencer a $K(a)$ encerra a justificação.

Os cortes do tipo $K(a)$, em que a é um número racional arbitrário, são chamados *cortes racionais*. O corte $K(0)$ será indicado simplesmente por 0 e o corte $K(1)$ por 1.

Exemplo 2: O conjunto $K = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ ou } (x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2)\}$ é um corte em $\mathbb{Q}$.

A demonstração das duas primeiras partes da definição é imediata. Agora, se $x \in K$, vamos considerar os dois seguintes casos: $x < 0$; $x > 0$ e $x^2 < 2$.

No primeiro, como $1 > x$ e $1 \in K$, assunto encerrado. Quanto ao segundo caso, ou seja, $x > 0$ e $x^2 < 2$, basta observar que $\dfrac{4x}{2+x^2} = u \in K$ e $u > x$ (como mostra raciocínio feito no exemplo 2 do capítulo 5).

Proposição 1

a) Se x e y são números racionais e $x < y$, então $K(x) \subset K(y)$ e $K(x) \neq K(y)$.

b) Se J é um corte em $\mathbb{Q}$ e $x \in J$, então $K(x) \subset J$ e $K(x) \neq J$.

Demonstração de b): Se $y \in K(x)$, então $y < x$ e, como $x \in J$, então $y \in J$. Logo $K(x) \subset J$. Por outro lado, como $x \in J$ existe $u \in J$ tal que $u > x$. Logo, $u \notin K(x)$ e, portanto, $K(x) \neq J$.

Definição 2

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto de todos os cortes racionais; então cada elemento de $\mathbb{R}$ será chamado *número real* e, consequentemente, $\mathbb{R}$ será chamado de *conjunto dos números reais* em se definindo *adição, multiplicação* e a relação $\leq$ da seguinte maneira:

Adição: Se J e K são cortes em $\mathbb{Q}$, a *soma* J com K é, por definição, o seguinte subconjunto de $\mathbb{Q}$:

$$J + K = \{x + y \mid x \in J \text{ e } y \in K\}.$$

Mostremos que $J + K$ também é um corte em $\mathbb{Q}$.

- Que vale a condição **i** da definição 1 é imediato.
- Seja $x + y$ ($x \in J$ e $y \in K$) um elemento de $J + K$ e consideremos um número racional $u < x + y$, então $x + y = u + t$, para algum

número racional $t > 0$. Fazendo $y - t = z$, então $y = t + z$ (o que mostra que $z < y$ e, portanto, que $z \in K$) e $u = x + (y - t) = x + z$. Como $x \in J$ e $z \in K$, então $u \in J + K$.

- Seja $z = x + y$ ($x \in J$ e $y \in K$) um elemento de $J + K$. Como J e K são cortes racionais, existem $x_1 \in J$ e $y_1 \in K$ tais que $x < x_1$ e $y < y_1$. Daí $x + y < x_1 + y_1$ e, como $x_1 + y_1 \in J + K$, fica provado que há em $J + K$ um número racional maior que z.

Então, indicando-se por $\mathbb{R}$ o conjunto dos cortes em $\mathbb{Q}$, a correspondência

$$(J, K) \mapsto J + K,$$

onde J e K são cortes em $\mathbb{Q}$, é uma operação sobre $\mathbb{R}$. Pode-se provar que para essa operação valem as seguintes propriedades, quaisquer que sejam os cortes I, J, K em $\mathbb{Q}$:

a$_1$) $(I + J) + K = I + (J + K)$.

a$_2$) $I + J = J + I$.

a$_3$) $I + 0 = I$.

a$_4$) A equação $J + X = 0$, tem uma única solução.

Essa solução, indicada por $-J$, e chamada *simétrico aditivo* ou *oposto* de J, é definida assim: $-J = \{x \in \mathbb{Q} \mid -x \notin J$ e $-x$ não é o mínimo de $\mathbb{Q} - J\}$,

Como consequência, se I, J e K são cortes de Dedekind e $I + J = I + K$, então $J = K$ (justifique).

Exemplo 3: Mostremos que $K(2) + K(\text{-}2) = K(0)$ ($\Leftrightarrow K(\text{-}2) = -K(2)$)

Seja $x + y \in K(2) + K(-2)$, em que $x \in K(2)$ e $y \in K(-2)$. Então $x < 2$ e $y < -2$ e, portanto, $x + y < 2 + (-2) = 0$. Ou seja, $x + y \in K(0)$.

Se, por outro lado, se $z \in K(0)$, então $z < 0$ e, portanto, $-z = d > 0$. Como

$$z = \left(2-\frac{d}{2}\right)+\left(-2-\frac{d}{2}\right),$$

em que $2-\dfrac{d}{2} \in K(2)$ e $-2-\dfrac{d}{2} \in K(-2)$, então $z \in K(2) + K(-2)$.

Nota: De um modo geral, se a é um número racional, então $K(a) + K(-a) = K(0)$.

Definição 3

Seja a um número real e n um número natural, define-se, então, na (*múltiplo* n*-ésimo de* a) da seguinte maneira:

- $0a = 0$.
- Se $n > 0$, então $na = (n - 1)a + a$.

Assim, $1a = 0a + a = a$, $2a = 1a + a = a + a$. $3a = 2a\ a = (a + + a) + a$, etc.

A relação $\leq$: Se I e J são dois cortes racionais, diz-se que $I \leq J$ se $I \subset J$.

Vale observar que:

- $J \geq I$ significa $I \leq J$.
- $I < J$ (ou $J > I$) significa $I \leq J$ e $I \neq J$.
- Os conceitos de *positivo*, *negativo*, *estritamente positivo* e *estritamente negativo* são definidos da maneira habitual.

Para a relação $\leq$ sobre $\mathbb{R}$ assim definida, valem as seguintes propriedades, quaisquer que sejam os cortes I, J, K em $\mathbb{Q}$:

$\mathbf{o_1}$) $I \leq I$.

$\mathbf{o_2}$) $I \leq J$ e $J \leq I \Rightarrow I = J$.

$\mathbf{o_3}$) $I \leq J$ e $J \leq K \Rightarrow I \leq K$.

$\mathbf{o_4}$) $I \leq J$ ou $J \leq I$.

Logo, $\leq$ é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{R}$.

E, para a relação $<$, vale a *lei da tricotomia*, ou seja, se I e J são cortes em $\mathbb{Q}$, então $I < J$, $I = J$ ou $J < I$.

Exemplo 4: Um corte K é estritamente positivo se, e somente se, existe $x \in K$, $x > 0$.

($\Rightarrow$) Se $K > K(0)$, então $K(0) \subset K$ e $K(0) \neq K$. Logo, existe $x \in K$ tal que $x \notin K(0)$ e, portanto, $x \geq 0$. Se $x > 0$, demonstração encerrada. Se $x = 0$, a parte **iii** da definição de corte garante que existe $a \in K$, $a > 0$.

($\Leftarrow$) Por hipótese, existe $x \in K$, $x > 0$. Assim, se $y \in K(0)$, então $y < 0 < x$ e, portanto, pela parte **ii** da definição de corte, podemos garantir que $y \in K$. Logo, $K(0) \subset K$. Como $x \in K$ e $x \notin K(0)$, então $K(0) < K$.

Exemplo 5: Se I e J são cortes em $\mathbb{Q}$. Se $J > I$, então $J - I = J + (-I) > > K(0)$.

Por hipótese, existem elementos de J que não pertencem a I. Dentre estes, indiquemos por x um que não seja o mínimo (se existir) de $\mathbb{Q} - (-I)$. Mas se $x \in J$, então existe um número racional y tal que $y > x$ e $y \in J$. Consideremos o número racional estritamente positivo $y + (-x)$. Como $x \notin I$ e x não é o mínimo de $\mathbb{Q} - (-I)$, então $-x \in (-I)$. Logo, $y + (-x) \in J + (-I)$. Daí, $J + (-I) > K(0)$, pois $J + (-I)$ possui um elemento estritamente positivo. ■

Como consequência, se $J > I$, então existe um corte K estritamente positivo tal que $J = I + K$. Obviamente: $K = J - I$.

Multiplicação: Se I e K são cortes em $\mathbb{Q}$, o produto $I \cdot K$ (ou IK, simplesmente) é definido assim:

- Se $I > 0$ e $K > 0$, então
  $I \cdot K = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{xy \mid x \in I, x > 0; y \in K, y > 0\}$.
- Se $I = 0$ ou $K = 0$, então $I \cdot K = 0$.
- Se $I < 0$ e $K < 0$, então $I \cdot K = (-I) \cdot (-K)$.
- Se apenas um dos cortes é menor que 0, digamos, $I < 0$, então

$$I \cdot K = -[(-I) \cdot J].$$

Pode-se provar que a lei que associa a cada par (I, K) de cortes seu produto $I \cdot K$ é uma operação sobre $\mathbb{R}$, chamada *multiplicação* de cortes.

Para essa operação, valem as seguintes propriedades, quaisquer que sejam os cortes I, J, K em $\mathbb{Q}$:

m$_1$) $(I \cdot K) \cdot K = I \cdot (J \cdot K)$.

m$_2$) $I \cdot J = J \cdot I$.

m$_3$) $J \cdot 1 = J$ ($\Leftrightarrow J \cdot K(1) = J$).

m$_4$) A equação $J \cdot X = K(1)$ tem uma única solução.

Essa solução é chamada *simétrico multiplicativo* ou *inverso* de J e é denotada por J^{-1}.

Envolvendo a adição e a multiplicação, vale ainda a propriedade distributiva da multiplicação, ou seja:

d) $I \cdot (J + K) = I \cdot J + I \cdot K, \ \forall\ I, J, K \in \mathbb{R}$.

Nota: Daqui em diante, para facilitar, muitas vezes denotaremos os números reais por letras minúsculas de nosso alfabeto.

Proposição 2

Se a e b são números reais, sendo $b \neq 0$, indica-se por $\frac{a}{b}$ o produto ab^{-1}. Isso posto, valem as seguintes propriedades para quaisquer números reais $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se $b \neq 0$ e $d \neq 0$: **i)** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$; **ii)** $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$; **iii)** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Demonstração de ii: Usaremos, na demonstração, o fato de que $(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$. Esse resultado decorre do seguinte:

$$(ab)(a^{-1} \cdot b^{-1}) = (aa^{-1})(bb^{-1}) = 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= ab^{-1} + cd^{-1} = a(dd^{-1})b^{-1} + c(bb^{-1})d^{-1} \\ &= (ad)(bd)^{-1} + (bc)(bd)^{-1} = \\ &= (ad + bc)(bd)^{-1} = \frac{ad+bc}{bd}.\end{aligned}$$

Envolvendo as operações e a relação de ordem sobre $\mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades, para cortes quaisquer I, J:

- $I \leq J \Rightarrow I + K \leq J + K$, para todo corte K.
- $I \leq J \Rightarrow I \cdot K \leq J \cdot K$. Para todo corte $K > 0$.

Ou seja, a relação de ordem $\leq$ é *compatível* com as operações definidas sobre $\mathbb{R}$.

As propriedades algébricas básicas do conjunto $\mathbb{R}$, dotado da adição, da multiplicação e da relação $\leq$ definidas nesta seção foram apenas enunciadas, em face dos complexos artifícios que envolvem sua demonstração e porque não se encontram entre as prioridades deste livro.

Também nos limitaremos a citar que a aplicação $\sigma : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $\sigma(a) = K(a)$ é:

- Injetora.
- *Conserva* as operações adição e multiplicação, e a relação de ordem $\leq$, isto é, para quaisquer números racionais a e b:

  $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$ ($\Leftrightarrow K(a + b) = K(a) + K(b)$)

  $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$ ($\Leftrightarrow K(a \cdot b) = K(a) \cdot K(b)$)

  $a \leq b \Rightarrow \sigma(a) \leq \sigma(b)$ (ver proposição 1).

Isso torna válido, algebricamente falando, identificar cada número racional a com o corte $K(a)$ (a identificação de 0 com $K(0)$ já foi até antecipada) e, portanto, considerar $\mathbb{Q}$ como um subconjunto de $\mathbb{R}$. Formalmente, nesse contexto, $\sigma(a) = a$, $\forall a \in \mathbb{Q}$. Na verdade, $\mathbb{Q}$ é um *subcorpo* de $\mathbb{R}$, pois se trata de dois *corpos*, tais que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e as operações e a relação de ordem em $\mathbb{Q}$ são restrições, a este último conjunto, das operações e da relação de ordem em $\mathbb{R}$, mediante a identificação proporcionada por σ. Chamaremos a aplicação σ de *imersão* de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

Os elementos de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são os de *números irracionais*. Portanto, no modelo criado por Dedekind para introdução dos números reais, os números irracionais se identificam com os cortes não racionais.

Exemplo 6: O corte do $K = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ ou } (x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2)\}$ define um número irracional. De fato, suponhamos que houvesse um número racional a tal que $K = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$. Como a é o supremo deste segundo conjunto, então deveríamos ter $a = sup(K)$. Mas o conjunto K não possui supremo (ver exemplo 2, capítulo 5).(NA) Portanto, K define um número irracional. Na verdade, o número irracional definido por K é $\sqrt{2}$, como veremos.

Proposição 3

Sejam I e K, $I < K$, dois números reais. Então existe um número racional r tal que $I < K(r) < K$ (em outras palavras, entre dois números reais diferentes quaisquer há sempre um número racional – e, portanto, infinitos).

Demonstração: Como I está contido propriamente em K, então existe $s \in K$ tal que $s \notin I$. Seja $r \in K$ um número racional maior que s e mostremos que $I \leq K(s) < K(r) < K$.

Suponhamos que existisse $x \in I$ tal que $x \notin K(s)$ ou, o que é equivalente, $x \geq s$. Mas como $s \notin I$, então, na verdade, $x > s$. Esta desigualdade, porém, implica que $s \in I$, pois $x \in I$ e I é um corte em $\mathbb{Q}$. Absurdo. Donde, todo elemento que está em I também pertence a $K(s)$, ou seja $I \subset K(s)$, ou $I \leq K(s)$.

Como $s < r$, então $K(s) \subset K(r)$ e $K(s) \neq K(r)$, ou seja, $K(s) < K(r)$.

Falta provar que $K(r) < K$. Se $x \in K(r)$, então $x < r$ e, como $r \in K$, então $x \in K$. Logo, $K(r) \subset K$. Por outro lado, levando em conta que $r \in K$,

NA O supremo de K em $\mathbb{Q}$ é também o supremo de $L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ que, como garante a resolução do exercício mencionado, não existe.

existe $u \in K$, $u > r$. Daí, $K(r) \subset K(u)$ e $K(u) \neq K(r)$. Como $u \in K$, implica que $K(u) \subset K$, então $K(r) \subset K(u) \subset K$, com $K(r) \neq K(u)$. Logo, $K(r) < K$ e, portanto, $I < K(r) < K$.

■

Proposição 4

Seja $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{A} \neq \varnothing$. Se $\mathbb{A}$ é limitado superiormente, então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $s = sup(\mathbb{A})$.

Demonstração: Seja $W = \cup \{I \mid I \in \mathbb{A}\}$ e mostremos inicialmente que W é um corte em $\mathbb{Q}$.

- Obviamente W não é vazio porque cada $I \neq \varnothing$. Por outro lado, como $\mathbb{A}$ é limitado superiormente, existe um corte K tal que $I \subset K$, qualquer que seja $I \in \mathbb{A}$. Como existe um número racional a que não pertence a K (porque K é um corte), então $a \notin W$. (Se $a \in W$, então $a \in I$, para algum $I \in \mathbb{A}$; logo, a pertenceria a K, o que é impossível.)
- Seja $x \in W$ e consideremos um número racional $y < x$. Como x pertence a W, então $x \in I$, para algum $I \in \mathbb{A}$. Mas como I é um corte, $y \in I$. Logo, $y \in W$.
- Se $x \in W$, então $x \in I$, para algum $I \in \mathbb{A}$. Como I é um corte, existe $y \in I$ (e, portanto, $y \in W$) tal que $y > x$.

Provaremos, agora, que $W = sup(\mathbb{A})$.

- Como W é a união de todos os cortes que pertencem a $\mathbb{A}$, então $I \subset W$, qualquer que seja $I \in \mathbb{A}$, ou seja, $I \leq W$, $\forall\ I \in \mathbb{A}$.
- Seja L uma cota superior de $\mathbb{A}$; então $I \subset L$, $\forall\ I \in \mathbb{A}$, donde $W \subset L$, ou seja, $W \leq L$.

Nota: A proposição 4 garante que $\mathbb{R}$ é um *corpo ordenado completo*. Pode-se demonstrar que todo o corpo ordenado completo é *isomorfo* a $\mathbb{R}$, ou seja, essencialmente, um corpo ordenado completo não se distingue de $\mathbb{R}$ no que tange à estrutura algébrica.

Proposição 5

Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{R}$ e suponhamos que todo elemento de $\mathbb{A}$ seja menor que todo elemento de $\mathbb{B}$. Então existe um único elemento de $\mathbb{R}$ que não é superado por nenhum elemento de $\mathbb{A}$ e que não supera nenhum elemento de $\mathbb{B}$.

Demonstração: Como todo $y \in \mathbb{B}$ é cota superior de $\mathbb{A}$, então existe $c = sup(\mathbb{A}) \in \mathbb{R}$. Logo, $x \leq c$, para todo $x \in \mathbb{A}$. Como c é a menor das cotas superiores de $\mathbb{A}$, então $c \leq y$, para qualquer $y \in \mathbb{B}$. Em suma, $x \leq c \leq y$, para qualquer $x \in \mathbb{A}$ e qualquer $y \in \mathbb{B}$, o que encerra a demonstração, quanto à existência.

Suponhamos que existisse um outro elemento $c' \in \mathbb{R}$ gozando das mesmas propriedades e tal que $c < c'$. Porém, como já vimos, existe um número racional a tal que $c < a < c'$. Então a não pertence a $\mathbb{A}$, por ser maior que c, e nem pertence a $\mathbb{B}$, por ser menor que c'. Absurdo. Da mesma maneira se prova que $c' < c$ leva a uma contradição. Fica provada, então, a unicidade. ■

Proposição 6

Existe um número real c tal que $c^2 = 2$ (ou seja, existe a raiz quadrada de 2 em $\mathbb{R}$).

Demonstração: Sejam $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } (x \geq 0 \text{ e } x^2 \leq 2)\}$ e $J = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \text{ e } y^2 > 2\}$.

Consideremos um elemento $u \in \mathbb{R}$. Se $u < 0$ então $x \in I$.

Se $u \geq 0$, tem-se então as seguintes possibilidades: $u^2 \leq 2$ ou $u^2 > 2$. Na primeira, $u \in I$ e, na última, $u \in J$. Logo, $I \cup J = \mathbb{R}$.

Por outro lado, seja $x \in I$. Se $x \leq 0$, então, obviamente, x é menor que todo elemento de J. Se $x > 0$, então $x^2 \leq 2$ e como $y^2 > 2$, qualquer que seja $y \in J$, então $x^2 < y^2$ do que segue $x < y$ (por quê?). Logo, todo elemento de I é menor que todo elemento de J.

Então, devido à proposição anterior, existe um único $c \in \mathbb{R}$ ($c = sup(I)$) tal que $x \leq c \leq y$, quaisquer que sejam $x \in I$ e $y \in J$. Mostremos agora, por redução ao absurdo, que $c^2 = 2$.

Suponhamos que se pudesse ter $c^2 < 2$. Então, seguindo-se a mesma linha de raciocínio do exemplo 2, capítulo 5, prova-se que, para o número real $c_1 = \dfrac{4c}{2+c^2}$, valem as desigualdades $c < c_1$ e $c_1^2 \leq 2$ (logo, $c_1 \in I$), o que é absurdo, pois $c = sup(I)$.

Vejamos a pista para provar que $c^2 > 2$ também leva a uma contradição. Toma-se $c_2 = \dfrac{2+c^2}{2c}$ e prova-se que $c_2^2 \geq 2$ e $c_2 < c$. Desta última desigualdade decorre (ver exercício 451) que existe $x \in I$

tal que $c_2 < x \leq c$. Então $c_2^2 < x^2 \leq 2$ e daí $c_2^2 < 2$. Absurdo. Donde $c^2 = 2$, como queríamos provar. ■

Nota: Generalizando o raciocínio desenvolvido no exemplo anterior, pode-se provar que dado um número real $a \geq 0$ e um número natural $n > 2$, existe um número real c tal que $c^n = a$. Esse número é chamado raiz n-ésima de a e denotado por $\sqrt[n]{a}$.

Proposição 7

Sejam a e b números reais, com $a > 0$. Então existe um número natural $n > 0$ tal que $na > b$, ou seja, o corpo dos números reais é arquimediano.

Demonstração: Podemos nos ater ao caso $b > a$. Indiquemos por I o corte que define a e por K o corte que define b. Então $K \supset I$ e $K \neq I$. Como $a > 0$, então $b > 0$, ou seja, $I \supset 0$ e $K \supset 0$, I, $K \neq 0$, existem números racionais estritamente positivos r e s tais que $r \in I$ e $s \notin K$. Então $r < a$ e $s > b$ e daí $ma > mr$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ (por quê?).

Sendo o corpo $\mathbb{Q}$ arquimediano, existe num número natural não nulo n tal que $nr > s$. Então $na > nr > s > b$ e, portanto, $na > b$. ■

A representação geométrica dos números reais

Dada um reta r, fixemos dois de seus pontos. O primeiro, chamado origem, será denotado por O e o segundo, à direita de O, será denotado por U. Tomando-se o segmento OU como unidade de comprimento, a reta determinada por O e U é chamada *reta real*.

A semirreta de origem O e que contém U é chamada *semirreta positiva* (ou *semieixo positivo*) e a outra semirreta determinada por O em r, *semirreta negativa* (ou *semieixo negativo*).

Veremos agora como associar a cada ponto da reta r um único número real positivo por meio de uma correspondência bijetora, Assim, cada ponto que se identifica com um é um só número real que é chamado *abscissa* desse ponto.

Ao ponto O associa-se o número zero e ao ponto U o número 1. Seja dado agora um P do semieixo positivo, distinto de O e de U. Há dois casos a considerar: