Lista de Exercícios – Cortes em $\mathbb{Q}$

Envie a resolução escaneada (em PDF) até 27/09, para fundamentos.analise.ufpr@gmail.com.

1. Considere os seguintes cortes:

$$K(3),\ K(-1),\ K(\tfrac{1}{4}),\ K(-2,13) \text{ e } J = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0 \text{ ou } (r > 0 \text{ e } r^2 < 3)\}.$$

   (a) Verifique a quais desses cortes pertencem os seguintes números: $-3;\ 0;\ 2,13;\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{2}$ e 5;

   (b) Encontre cinco números racionais que pertencem ao corte $K(\frac{1}{4})$ e não pertencem ao corte $K(0)$;

   (c) Mostre que o corte J não possui supremo em $\mathbb{Q}$.
   Dica: imite o raciocínio que fizemos em sala de aula para mostrar que o corte que define o $\sqrt{2}$ não tem supremo em $\mathbb{Q}$.

2. Usando as definições de adição e multiplicação de cortes, mostre que $K(2) + K(3) = K(5)$ e $K(2).K(3) = K(6)$.

3. Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$, prove que $K(r) \subset K(s) \Leftrightarrow r \leq s$.

4. Seja K um corte e $r \in \mathbb{Q}$. Prove que os seguintes conjuntos também são cortes em $\mathbb{Q}$:

   (a) $r + K = \{r + x : x \in \mathbb{Q}\}$;

   (b) $rK = \{rx : x \in \mathbb{Q}\}$. Aqui é preciso supor $r > 0$. (por que?)

5. Sejam J e K cortes em $\mathbb{Q}$ tais que existe $r \in K$ tal que $r \notin J$. Prove que $J < K$.

6. Sejam J e K cortes em $\mathbb{Q}$, com $J \neq K$. Prove que:

   (a) existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $J < K(r)$;

   (b) $J < K$ ou $K < J$;