

## Lista de Exercícios – Séries Numéricas

06/11/2023

Envie a resolução escaneada (em PDF) até 26/11, para [fundamentos.analise.ufpr@gmail.com](mailto:fundamentos.analise.ufpr@gmail.com).

1. Seja  $\sum a_n$  uma série convergente com termo geral  $a_n \geq 0$  e  $(b_n)$  uma sequência limitada. Prove que a série  $\sum a_n b_n$  converge.
2. Se  $\sum a_n$  é uma série convergente, mostre que  $\sum a_n^2$  converge. Dê um exemplo para mostrar que a recíproca é falsa
3. Sejam  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  séries convergentes com termo geral não negativo. Prove que a série  $\sum a_n b_n$  converge. dica:  $(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2$ .
4. Sejam  $(a_n)$  e  $(b_n)$  sequências de termos não negativos. Mostre que se a série  $\sum b_n$  converge e  $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ , então  $\sum a_n$  converge.
5. Mostre que:  $\sum a_n$  converge  $\iff \sum \frac{a_n}{a_n + 1}$  converge. dica:  $\frac{a_n}{a_n + 1} \leq 2a_n$ , para  $n$  grande.
6. Use o critério da comparação para verificar qual das seguintes séries são convergentes:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ ,

(c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ ,

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ,

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ,

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$ ,

(f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2}{2^n - n}$ .

7. Sejam  $a > 1$  e  $k$  um inteiro positivo. Mostre que as seguintes séries são convergentes:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ ,

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$ ,

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^n}$ ,

8. Calcule as somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  e use isso para mostrar que essa série converge e tem soma igual a 1.

9. Seja  $P(x)$  um polinômio de grau superior a 1. Prove que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(n)}$  converge.

10. Usando um teste de convergência, verifique quais das seguintes séries são convergentes:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} n^b a^n$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{a^n 2^{n^2}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2^{n^2}}$$

11. Verifique quais das seguintes séries são convergentes. Para as séries que forem convergentes diga se a convergência é absoluta ou condicional.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n^2 + 1}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n + 1}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n} \frac{1}{n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$$