

Lista de Exercícios – Séries Numéricas

06/11/2023

Envie a resolução escaneada (em PDF) até 26/11, para fundamentos.analise.ufpr@gmail.com.

1. Seja $\sum a_n$ uma série convergente com termo geral $a_n \geq 0$ e (b_n) uma sequência limitada. Prove que a série $\sum a_n b_n$ converge.
2. Se $\sum a_n$ é uma série convergente, mostre que $\sum a_n^2$ converge. Dê um exemplo para mostrar que a recíproca é falsa
3. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes com termo geral não negativo. Prove que a série $\sum a_n b_n$ converge. dica: $(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2$.
4. Sejam (a_n) e (b_n) sequências de termos não negativos. Mostre que se a série $\sum b_n$ converge e $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, então $\sum a_n$ converge.
5. Mostre que: $\sum a_n$ converge $\iff \sum \frac{a_n}{a_n + 1}$ converge. dica: $\frac{a_n}{a_n + 1} \leq 2a_n$, para n grande.
6. Use o critério da comparação para verificar qual das seguintes séries são convergentes:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$,

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n - n}$.

7. Sejam $a > 1$ e k um inteiro positivo. Mostre que as seguintes séries são convergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^n}$,

8. Calcule as somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ e use isso para mostrar que essa série converge e tem soma igual a 1.

9. Seja $P(x)$ um polinômio de grau superior a 1. Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(n)}$ converge.

10. Usando um teste de convergência, verifique quais das seguintes séries são convergentes:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} n^b a^n$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{a^n 2^{n^2}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2^{n^2}}$$

11. Verifique quais das seguintes séries são convergentes. Para as séries que forem convergentes diga se a convergência é absoluta ou condicional.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n^2 + 1}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n + 1}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n} \frac{1}{n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$$