

# Representação decimal dos números racionais

Alexandre Kirilov    Elen Messias Linck

29 de junho de 2022

## 1 Introdução

Um número é racional se puder ser escrito na forma  $a/b$ , com  $a$  e  $b$  inteiros e  $b \neq 0$ ; esta é a forma fracionária de um número racional. Fazendo a divisão de  $a$  por  $b$  obtemos a representação decimal do número racional.

A primeira coisa que observamos ao fazer tal divisão é que algumas vezes obtemos representações decimais finitas, por exemplo

$$1/2 = 0,5 \quad \text{e} \quad 12/25 = 0,48$$

e outras vezes obtemos representações infinitas e periódicas, como

$$1/3 = 0,333\dots \quad \text{e} \quad 22/39 = 0,564102564102\dots$$

A experiência com o uso de calculadoras, anos de escola e professores nos ensinando, nos diz que isso sempre acontece, ou seja, ao passar da forma fracionária para decimal teremos sempre um número finito de casas decimais ou uma dízima infinita e periódica.

Portanto achamos conveniente destacar algumas perguntas a este respeito:

1. Por que representação decimal de um número racional é sempre finita ou infinita periódica?
2. É possível prever se a representação decimal de um número racional será finita ou infinita periódica olhando apenas para a forma fracionária do número? (antes de iniciar o processo de divisão)
3. Dada uma representação decimal qualquer, é sempre possível obter sua forma fracionária?
4. Já sabemos que a representação fracionária não é única (frações equivalentes), mas o que podemos dizer sobre representação decimal em termos de unicidade?
5. E as representações decimais infinitas não periódicas?

Vamos responder a cada uma dessas perguntas, começando pela situação mais simples: representações decimais finitas.

## 2 Representação decimal finita

A partir dos exemplos

$$0,5 = \frac{5}{10} \quad 0,17 = \frac{17}{100} \quad \text{e} \quad 0,8625 = \frac{8625}{10000}$$

notamos que é simples transformar um número com uma quantidade finita de casas decimais em numa fração com numerador inteiro e denominador igual a uma potência de 10. Simplificando cada uma das frações acima obtemos sua forma irredutível

$$0,5 = \frac{1}{2} \quad 0,17 = \frac{17}{100} \quad \text{e} \quad 0,8625 = \frac{69}{80}$$

O denominador da fração irredutível, assim como o da fração original, tem apenas os fatores primos 2 e 5 (provenientes das potências de  $10 = 2 \times 5$  que ali estavam antes de efetuarmos a simplificação).

Com base nesses exemplos podemos intuir que, ao nos depararmos com números racionais cuja decomposição do denominador em fatores primos apareça apenas os fatores primos 2 e 5, poderemos "completar" essa decomposição de modo a obter alguma potência de 10. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{20} &= \frac{1}{2^2 \cdot 5} = \frac{1}{2^2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{5}{100} = 0,05 \\ \frac{3}{16} &= \frac{3}{2^4} = \frac{3}{2^4} \cdot \frac{5^4}{5^4} = \frac{3 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{1875}{10000} = 0,1875 \end{aligned}$$

Aparentemente, o fato mais importante aqui é que o denominador não tenha fatores primos diferentes de 2 e 5, pois a decomposição do número 10 em fatores primos contém apenas esses dois fatores.

Entretanto no exemplo  $273/140 = 1,95$  temos  $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ .

- Por que isso não contradiz o que fizemos logo acima?
- Que hipótese deve ser adicionada no argumento acima para garantir que a forma decimal de um número racional seja sempre finita?

Tente responder essas duas questões antes de prosseguir. Pensar em outros exemplos mais simples pode te ajudar a encontrar a resposta ( $3/6 = 0,5$ ,  $14/35 = 0,4$ ).

Nosso primeiro resultado é a generalização dessa discussão.

**Teorema 2.1.** *Um número racional possui representação decimal finita se e somente se quando escrito na forma irredutível, a decomposição em fatores primos de seu denominador possui apenas os fatores 2 ou 5.*

**Demonstração:** Seja  $r$  um número com uma quantidade finita de casas decimais, ou seja,  $r$  pode ser escrito na forma

$$r = s + 0, t_1 t_2 t_3 \dots t_n,$$

sendo  $s \in \mathbb{Z}$  a parte inteira e cada  $t_j$  uma casa decimal de  $r$ , ou seja, cada  $t_j$  é um algarismo de 0 a 9. Vamos provar que  $r$  possui uma representação em forma de fração na qual o denominador é da forma  $2^p 5^q$ , para algum  $p, q \in \mathbb{N}$ .

Note que, se todas as casas decimais são nulas, então  $r = s$  é um número inteiro e podemos escrevê-lo na forma fracionária

$$r = \frac{r}{2^0 5^0}.$$

Logo podemos supor que pelo menos uma casa decimal é diferente de zero, ou seja, que  $t_n \neq 0$ . Neste caso

$$0, t_1 t_2 t_3 \dots t_n \times 10^n = t_1 t_2 t_3 \dots t_n \quad \Rightarrow \quad 0, t_1 t_2 t_3 \dots t_n = \frac{t_1 t_2 t_3 \dots t_n}{10^n}$$

e assim

$$r = s + 0, t_1 t_2 t_3 \dots t_n = s + \frac{t_1 t_2 t_3 \dots t_n}{10^n} = \frac{s \times 10^n + t_1 t_2 t_3 \dots t_n}{2^n 5^n}$$

Chegamos assim a uma representação fracionária de  $r$  com numerador inteiro e denominador da forma  $2^n 5^n$ .

Convém observar que para obter a forma irredutível da última fração acima talvez seja necessário simplificar certa quantidade de fatores primos comuns ao numerador e denominador, porém no denominador restarão ainda apenas potências dos fatores 2 ou 5.

Reciprocamente, se  $a/b$  é uma fração irredutível com  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b = 2^p 5^q$  e  $p, q \in \mathbb{N}$ , supondo  $p \geq q$  temos

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^p \cdot 5^q} = \frac{a}{2^p \cdot 5^q} \cdot \frac{5^{p-q}}{5^{p-q}} = \frac{a \times 5^{p-q}}{2^p \times 5^p} = \frac{a \times 5^{p-q}}{10^p}$$

e daqui podemos concluir que a representação decimal de  $a/b$  possui  $p$  casas decimais. O caso  $p < q$  é análogo, o que conclui a prova do teorema.  $\square$

**Corolário 2.2.** *Um número racional possui representação decimal infinita se e somente se quando escrito na forma irredutível, a decomposição em fatores primos do denominador possui algum fator primo diferente de 2 e 5.*

Note que este corolário é simplesmente a negação lógica do teorema 2.1, logo não podemos afirmar nada a respeito da periodicidade da dízima, nem mesmo quando é possível transformar uma representação decimal infinita para a forma fracionária.

Os resultados dessa seção nos dizem apenas o seguinte: partindo de um número racional (escrito em sua forma fracionária irredutível), basta olhar a decomposição do denominador em fatores primos para saber se sua representação decimal será finita ou infinita.

### 3 Representação decimal infinita periódica

Vamos começar analisando um exemplo no qual exploramos o processo de divisão por 7, para entender porque aparecem dízimas periódicas.

$$\begin{array}{r} 50,000000 \quad | \quad 7 \\ 10 \qquad \qquad \quad 7,14285\dots \\ \hline 30 \\ 20 \\ 60 \\ 40 \\ 5 \end{array}$$

Em palavras: na divisão de 50 por 7 obtemos o quociente 7 e o resto 1. Como não é possível dividir 1 por 7, passamos a dividir 10 décimos por 7 (o que justifica a necessidade de colocar uma vírgula após o 7 e um zero após o 1 no algoritmo de divisão).

Nesse segundo passo, divisão de 10 por 7, obtemos o quociente 1 e o resto 3. Nas divisões seguintes obtemos, sucessivamente, os restos 2, 6, 4 e 5.

No momento em que obtemos o resto 5 completamos um ciclo, pois o próximo passo seria dividir 50 por 7, o que já ocorreu antes. Portanto os algarismos do quociente voltarão a se repetir na mesma ordem de antes, caracterizando a dízima periódica.

$$\frac{50}{7} = 7,142857\ 142857\dots$$

Note que, no processo de divisão por 7 os restos possíveis são: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

- Quando ocorre o resto zero, o processo de divisão é encerrado e a representação decimal obtida é finita. Por exemplo:  $91/7 = 13$ .
- Caso contrário, se o resto zero jamais ocorrer, restarão apenas seis possíveis restos em um processo de divisão (de 1 a 6). Logo ao calcularmos o sétimo resto em um processo de divisão devemos repetir algum dos seis possíveis restos anteriores.

Conclusão: no processo de divisão por 7 obteremos uma dízima finita ou uma dízima periódica com no máximo seis algarismos.

Outros exemplos interessantes são:

$$\frac{5011}{495} = 10,1\ 23\ 23\dots \qquad \frac{41111}{333000} = 0,123\ 456\ 456\ 456\dots$$

**Observação 3.1.** As expressões “representação decimal” e dízima têm o mesmo significado para nós e as usaremos indistintamente.

**Definição 3.2.** Diremos que uma representação decimal infinita é uma dízima periódica quando tal dízima puder ser escrita na forma

$$a, b_1 b_2 b_3 \dots b_m \overline{p_1 p_2 p_3 \dots p_n}$$

aqui:

- ▷  $a \in \mathbb{Z}$  é a parte inteira da dízima;
- ▷  $b_i, p_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  são os algarismos da parte decimal da dízima;
- ▷  $b_1 b_2 b_3 \dots b_m$  é a parte decimal não periódica da dízima;
- ▷  $\overline{p_1 p_2 p_3 \dots p_n} \doteq p_1 p_2 p_3 \dots p_n p_1 p_2 p_3 \dots p_n \dots$  é a parte decimal periódica. O número  $p_1 p_2 p_3 \dots p_n$  é usualmente chamado de “período da dízima”.

Com essa notação os exemplos acima podem ser reescritos na forma:

$$\frac{5011}{495} = 10,12\overline{3}, \qquad \frac{41111}{333000} = 0,123\overline{456} \quad \text{e} \quad \frac{50}{7} = 7,1\overline{42857}$$

O próximo resultado é simplesmente a generalização do exemplo de divisão por 7 usado para iniciar essa seção. Sua demonstração segue as mesmas ideias e parece mais complicada porque está usando uma notação mais carregada. Não se assuste com a notação, mantenha em mente um exemplo e note que seguimos o mesmo roteiro das justificativas acima.

**Teorema 3.3.** *Seja  $a/b$  a forma irredutível de um número racional. Se a decomposição de  $b$  em fatores primos contém fatores diferentes de 2 e 5, então sua representação decimal é uma dízima periódica. Além disso, o período possui no máximo  $b - 1$  algarismos.*

**Demonstração:** Pelo corolário 2.2, sabemos que a representação decimal de  $a/b$  é infinita. Resta mostrar que é periódica.

Seja  $r_1$  o resto da divisão de  $a$  por  $b$ . Note que  $r_1 \neq 0$ , caso contrário a divisão resultaria em um número inteiro (dízima finita) contrariando o que foi dito no parágrafo anterior. Dessa forma,  $1 \leq r_1 \leq b - 1$ .

O próximo passo no algoritmo da divisão é dividir  $r_1 \cdot 10^k$  por  $b$  (aqui  $k$  é o menor número natural tal que  $r_1 \cdot 10^k > b$ ). Nesse passo obtemos um novo resto  $r_2$ , com  $1 \leq r_2 \leq b - 1$ .

Continuando com o processo de divisão acima obtemos a sequência de restos

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_{b-1}, r_b, \text{ com } 1 \leq r_j \leq b - 1 \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, b.$$

Como há apenas  $b - 1$  possibilidades de restos diferentes para esta divisão, então o resto  $r_b$  já apareceu pelo menos uma vez na sequência  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{b-1}$ . Isso garante que o processo de divisão entrou em um ciclo de repetição e que o comprimento do período é de no máximo  $b - 1$  casas decimais.  $\square$

## 4 Representação decimal $\times$ forma fracionária

Nas seções anteriores vimos que todo número racional possui uma representação decimal finita ou infinita periódica (Teoremas 2.1 e 3.3). Nesta seção mostraremos que a afirmação recíproca também é verdadeira, ou seja, que a cada dízima finita ou infinita periódica é possível associar um número racional.

Primeiramente devemos recordar que parte dessa recíproca já foi provada no teorema 2.1, pois foi mostrado que a cada representação decimal finita podemos associar uma fração cujo denominador é uma potência de 10.

A ideia é bastante simples e fica clara no seguinte exemplo:

$$13,54 \times 100 = 1354 \quad \Rightarrow \quad 13,54 = \frac{1354}{100}$$

No caso geral, dada uma representação decimal finita com  $m$  casas decimais

$$r = a, b_1 b_2 \dots b_m = a + 0, b_1 b_2 \dots b_m$$

multiplicarmos esta expressão por  $10^m$  e obtemos

$$10^m r = 10^m a + b_1 b_2 \dots b_m \quad \Rightarrow \quad r = \frac{10^m a + b_1 b_2 \dots b_m}{10^m}.$$

Vejam agora como transformar uma representação decimal infinita periódica em uma fração ordinária analisando um exemplo. Considere a seguinte dízima periódica:

$$r = 0,1234\overline{56}$$

A ideia aqui é multiplicar  $r$  por potências de 10 convenientemente escolhidas com o objetivo de “isolar” o período na parte decimal. Assim, quando subtrairmos os resultados obtidos, a parte decimal desaparecerá.

Neste exemplo vamos multiplicar primeiramente por  $10^6$ , depois por  $10^3$  obtendo

$$10^6 r = 123456, \overline{456} \quad \text{e} \quad 10^3 r = 123, \overline{456}$$

subtraindo teremos

$$(10^6 - 10^3)r = 123456, \overline{456} - 123, \overline{456}$$

ou seja

$$10^3(10^3 - 1)r = 123333 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{123333}{999000}.$$

Vamos repetir o argumento usado acima para o caso geral. Seja  $r$  uma dízima periódica ( $0 \leq r < 1$ ), como na definição 3.2, ou seja

$$r = 0, b_1 b_2 \dots b_m \overline{p_1 p_2 \dots p_n}.$$

Multiplicando  $r$  primeiro por  $10^{m+n}$  e depois por  $10^m$  obtemos as expressões

$$\begin{aligned} 10^{m+n} r &= b_1 b_2 \dots b_m p_1 p_2 \dots p_n, \overline{p_1 p_2 \dots p_n}, \\ 10^m r &= b_1 b_2 \dots b_m, \overline{p_1 p_2 \dots p_n}. \end{aligned}$$

Agora, subtraindo a segunda da primeira temos

$$(10^{m+n} - 10^m)r = b_1 b_2 \dots b_m p_1 p_2 \dots p_n, \overline{p_1 p_2 \dots p_n} - b_1 b_2 \dots b_m, \overline{p_1 p_2 \dots p_n},$$

ou seja,

$$r = \frac{b_1 b_2 \dots b_m p_1 p_2 \dots p_n - a b_1 b_2 \dots b_m}{10^m(10^n - 1)}.$$

Como  $r$  é uma dízima periódica, então  $n \geq 1$  e o denominador da fração acima  $10^n - 1 \neq 0$ . E assim obtivemos uma representação fracionária do número racional  $r$ .

No caso em que  $r = a, b_1 b_2 \dots b_m \overline{p_1 p_2 \dots p_n} \notin [0, 1)$ , basta escrever

$$r = a + 0, b_1 b_2 \dots b_m \overline{p_1 p_2 \dots p_n} = a + \frac{b_1 b_2 \dots b_m p_1 p_2 \dots p_n - a b_1 b_2 \dots b_m}{10^m(10^n - 1)}.$$

A soma dos dois racionais acima fornece a representação de  $r$  como quociente de dois inteiros. Assim acabamos de demonstrar o seguinte proposição:

**Proposição 4.1.** *A qualquer dízima finita ou infinita periódica  $r$  é possível associar um número racional cuja representação decimal é  $r$ .*

Finalmente podemos enunciar um teorema que reúne todos os resultados demonstrados até aqui e caracteriza completamente a representação decimal de um número racional.

**Teorema 4.2.** *Um número é racional se e somente se sua representação decimal é finita ou infinita periódica.*

## 5 Unicidade de representação

Considere o seguinte exemplo, bastante difundido entre apreciadores de matemática:

$$r = 0,999\dots$$

Para obter uma expressão fracionária para  $r$ , multiplicamos a expressão acima por 10 obtendo

$$10r = 9,999\dots$$

subtraindo as duas expressões acima vem

$$9r = 9 \quad \Rightarrow \quad r = 1,$$

ou seja,

$$1 = 0,999\dots$$

Esta expressão pode ser convenientemente usada para escrever as representações decimais finitas de uma forma diferente. De fato, dividindo a expressão  $1 = 0,999\dots$  por 10 repetidamente obtemos as igualdades:

$$\begin{aligned}0,1 &= 0,0999\dots \\0,01 &= 0,00999\dots \\0,001 &= 0,000999\dots \\0,0001 &= 0,0000999\dots\end{aligned}$$

A seguir usamos essas igualdades para escrever as seguintes identidades

$$\begin{aligned}1,58 &= 1,57 + 0,01 = 1,57 + 0,00999\dots = 1,57999\dots \\7,3285 &= 7,3284 + 0,0001 = 7,3284 + 0,0000999\dots = 7,3284999\dots \\-0,2 &= -(0,1 + 0,1) = -(0,1 + 0,0999\dots) = -0,1999\dots\end{aligned}$$

**Observação 5.1.** Note que os números racionais do exemplo acima admitem duas formas decimais infinitas diferentes, por exemplo,

$$1,58000\dots = 1,57999\dots$$

Ao falarmos da representação decimal infinita periódica, estaremos sempre nos referindo da segunda forma acima. A primeira continuará a ser tratada como dízima finita.

Vamos enunciar e demonstrar o resultado que generaliza os exemplos acima.

**Proposição 5.2.** *Todo número racional admite uma representação decimal infinita periódica.*

**Demonstração:** Dado um número racional qualquer, se sua forma fracionária irredutível possui denominador com fatores primos distintos de 2 e 5, em vista o Teorema 3.3, não há nada a provar. Caso contrário, sua representação decimal é finita, digamos

$$a, b_1 b_2 \dots b_m = a + 0, b_1 b_2 \dots b_m, \quad \text{com } b_m \neq 0.$$

Vamos provar que  $0, b_1 b_2 \dots b_m = 0, b_1 b_2 \dots b_{m-1} (b_m - 1) 999\dots$

Seja

$$r = 0, b_1 b_2 \dots b_{m-1} (b_m - 1) \overline{9},$$

multiplicando essa expressão primeiro por  $10^{m+1}$  e depois por  $10^m$  obtemos as expressões:

$$\begin{aligned} 10^{m+1} r &= b_1 b_2 \dots b_{m-1} (b_m - 1) 9, \overline{9} \\ 10^m r &= b_1 b_2 \dots b_{m-1} (b_m - 1), \overline{9} \end{aligned}$$

subtraindo a segunda expressão da primeira temos

$$(10^{m+1} - 10^m) r = b_1 b_2 \dots b_{m-1} (b_m - 1) 9, \overline{9} - ab_1 b_2 \dots b_{m-1} (b_m - 1), \overline{9}$$

ou seja

$$9 \times 10^m r = b_1 b_2 \dots b_{m-1} (b_m - 1) 9 - b_1 b_2 \dots b_{m-1} (b_m - 1)$$

somando e subtraindo o número inteiro 1 no lado direito da expressão acima não alteraremos seu valor, e podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$\begin{aligned} 9 \times 10^m r &= (b_1 b_2 \dots b_{m-1} (b_m - 1) 9 + 1) - (b_1 b_2 \dots b_{m-1} (b_m - 1) + 1) \\ &= 10 \times b_1 b_2 \dots b_{m-1} b_m - b_1 b_2 \dots b_m = 9 \times b_1 b_2 \dots b_{m-1} b_m \end{aligned}$$

Logo

$$r = \frac{b_1 b_2 \dots b_{m-1} b_m}{10^m} \Rightarrow r = 0, b_1 b_2 \dots b_{m-1} b_m.$$

O que conclui a demonstração do resultado. □

E com isso podemos reescrever o teorema 4.2 na seguinte forma

**Teorema 5.3.** *Um número é racional se e somente se admite uma representação decimal infinita periódica.*

Finalmente, vamos provar que essa representação decimal infinita periódica é única.

**Teorema 5.4.** *A representação decimal infinita periódica de um número racional é única.*

**Demonstração:** Suponha que exista um número racional  $r$  ( $0 \leq r < 1$ ) que admite duas representações decimais infinitas periódicas distintas. Neste caso podemos escrever

$$r = 0, b_1 b_2 b_3 \dots \quad \text{e} \quad r = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$$

como as dízimas periódicas acima são distintas, então existe um menor  $k$  tal que  $b_k \neq c_k$ .

Se  $b_k < c_k$  temos

$$\begin{aligned} r &= 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_k b_{k+1} \dots < 0, b_1 b_2 b_3 \dots c_k \\ &= 0, c_1 c_2 c_3 \dots c_k < 0, c_1 c_2 c_3 \dots c_k c_{k+1} \dots = r. \end{aligned}$$

O que é uma contradição. A prova para  $b_k > c_k$  é análoga. Portanto, todo número racional admite uma única representação decimal infinita periódica. □