

Lista 1 - Equações de Diferenças

1. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y_{n+1} = 3y_n + b \\ y_0 = 5 \end{cases}$$

- (a) Para qual valor de b teremos $y_2 = 21$?
- (b) Encontre a solução deste PVI com o valor calculado para b acima.

Solução: $b = -6$ e $y_n = 2 \cdot 3^n - 3$.

2. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y_{n+1} = ay_n + 4 \\ y_0 = -3 \end{cases}$$

- (a) Para qual valor inteiro de a teremos $y_2 = 0$?
- (b) Encontre a solução deste PVI com o valor calculado para a acima.

Solução: $a = 2$ e $y_n = 2^n - 4$

3. Considere a seguinte equação de diferenças

$$\begin{cases} y_{n+1} = 3y_n + b \\ y_0 = 6 \end{cases}$$

Para qual valor de b o PVI acima admite a solução constante $y_n = 6$?

Solução: $a = 2$ e $y_n = 2^n - 4$

4. Encontre as soluções gerais das seguintes equações de diferença lineares de segunda ordem homogêneas:

- (a) $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n$;
- (b) $y_n - 6y_{n-1} + 9y_{n-2} = 0$;
- (c) $y_{n+1} - 4y_n + 5y_{n-1} = 0$;
- (d) $y_n - y_{n-2} = 0$;

5. Encontre as soluções dos seguintes PVI's.

- (a) $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$, com $x_0 = 10$ e $x_1 = 20$;
- (b) $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$, com $x_0 = 2$ e $x_1 = 3$;
- (c) $x_{n+1} - 4x_n + 5x_{n-1} = 0$, com $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$;
- (d) $x_n - x_{n-2} = 0$, com $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$;

6. Encontre as soluções gerais das seguintes equações de diferença lineares de segunda ordem NÃO homogêneas:

- (a) $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n + 2^n$;
- (b) $y_n - 6y_{n-1} + 9y_{n-2} = 3^n$;

(c) $y_{n+1} - 4y_n + 5y_{n-1} = n + 1$;

(d) $y_n - y_{n-2} = 5^n$;

7. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y_{n+2} = ay_{n+1} - 6y_n \\ y_0 = 2 \text{ e } y_1 = 11 \end{cases}$$

(a) Para quais valores de a teremos $y_3 = 38$?

(b) Encontre a solução deste PVI com os valores calculados para a acima.

8. Encontre o(s) ponto(s) de equilíbrio das seguintes equações de diferenças não-lineares.

(a) $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n}$;

(b) $x_{n+1} = x_n e^{-ax_n}$;

(c) $(x_{n+1} - \alpha) = \alpha^2(x_n^2 - 2x_n + 1)$;

(d) $x_{n+1} = \frac{A}{B + C/x_n}$.

9. Encontre o(s) ponto(s) de equilíbrio das seguintes equações de diferenças não-lineares e determine sua estabilidade:

(a) $x_{n+1} = -x_n^2(1 - x_n)$;

(b) $x_{n+1} = x_n \ln x_n^2$;

(c) $x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n}$.

10. Suponha que você ganhou na loteria e decidiu fazer uma reserva de emergência guardando certa quantia de dinheiro Q_0 na poupança.

(a) Supondo que a poupança está rendendo uma taxa fixa r , qual é a equação de diferenças que modela o seu investimento?

(b) Qual é a solução desta equação de diferenças?

(c) Supondo que $r = 0,5\%$ ao mês, quanto tempo levará para seu valor inicial dobrar?

(d) Qual deveria ser a taxa de juros para seu valor inicial dobrar em 5 anos?

11. Suponha que você ganhou na loteria e decidiu viver de renda, ou seja, que você guardou uma quantia de dinheiro Q_0 na poupança, e todo mês irá sacar um valor fixo V para suas despesas do mês.

(a) Supondo que a poupança está rendendo uma taxa fixa r , qual é a equação de diferenças que modela o seu investimento?

(b) Qual é a solução desta equação de diferenças?

(c) Vamos supor que o depósito inicial foi de R\$ 2.000.000,00, que a taxa de juros é 0,5% ao mês, e que você quer sacar R\$ 15.000,00 por mês. Por quanto tempo você poderá fazer esses saques mensais?

(d) Qual deveria ser a taxa de juros para que você pudesse sacar R\$ 20.000,00 todos os meses durante os próximos 20 anos?