4ª Lista de Exercícios de EDDA
Equações de 2ª ordem

Enviar a resolução escaneada de todas as questões até às 24h de quinta-feira, 25 de julho, para o e-mail: analise.na.reta.ufpr@gmail.com.

1. Encontre as soluções do seguintes PVI's:

(a)	$y'' + y' - 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$	(b)	$6y'' - 5y' + y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 0$
(c)	$y'' + 4y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$	(d)	$y'' + y = 0, y(\pi/3) = 2, y'(\pi/3) = -4$
(e)	$9y'' - 12y' + 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -1$	(f)	$y'' + 4y' + 4y = 0, y(-1) = 2, y'(-1) = 1$

2. Mostre que a função y_1 abaixo é uma solução da equação dada. A seguir, use o método de redução de ordem para encontrar outra solução para a equação diferencial.

   (a) $t^2y'' - 4ty' + 6y = 0$, com $t > 0$, $y_1(t) = t^2$

   (b) $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$, com $t > 0$, $y_1(t) = t$

3. Se o wronskiano $W(f, g) = k$, e são dadas as funções $u = 2f - g$ e $v = f + 2g$, calcule o wronskiano $W(u, v)$ em função de k.

4. Considere a equação $x^2y - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$, com $x > 0$. Mostre que as funções $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = xe^x$ formam um conjunto fundamental de soluções dessa equação.

5. Mostre que, se a função p é diferenciavel e $p(t) > 0$, então o Wronskiano W(t) de duas soluções quaisquer de $[p(t)y']' + q(t)y = 0$ é da forma $W(t) = \frac{c}{p(t)}$, sendo c e uma constante.

6. Neste problema vamos provar a validade da fórmula de Euler de uma maneira diferente.

   (a) Mostre que as funções $y_1(t) = \cos t$ e $y_2(t) = \sin t$ formam um conjunto fundamental de solucões da equação $y" + y = 0$.

   (b) Sabendo que a derivada $(e^{it})' = ie^{it}$, mostre que a função $y = e^{it}$ também é solução de $y" + y = 0$. Portanto, $e^{it} = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

   (c) Fazendo $t = 0$ na equação acima, mostre que $c_1 = 1$. A seguir derive a expressão acima e faça $t = 0$ para concluir que $c_2 = i$.

7. Use o método dos coeficientes indeterminados para encontrar uma solução particular para as equações diferenciais abaixo:

   (a) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$ (b) $y'' - 2y' + 5y = 3\sin(2t)$

8. Encontre a solução dos PVI's abaixo:

   (a) $y - 2y' - 3y = 3e^{2t}, y(0) = 1, y'(0) = 0$

   (b) $y'' - 2y' + 5y = 3\sin(2t), y(0) = 0, y'(0) = 1$

9. Use o metodo de variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular para a equação diferencial $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$. A seguir encontre a solução geral da equação.

Respostas:

1. (a) e^t (b) $12e^{t/3} - 8e^{t/2}$ (c) $e^{-2t}\cos(t) + 2e^{-2t}\sin(t)$
   (d) $(1+2\sqrt{3})\cos t - (2-\sqrt{3})\sin t$ (e) $2e^{2t/3} - \frac{7}{3}te^{2t/3}$ (f) $7e^{-2(t+1)} + 5te^{-2(t+1)}$
2. No final da seção 3.4 do Boyce-Diprima tem uma explicação de como usar este método
3. 5k
4. Calcule o wronskiano e use os teoremas vistos.
5. Use a fórmula de Abel.
6. Use os teoremas sobre soluções fundamentais
7. (a) $-e^{2t}$ (b) $(3\sin(2t) + 12\cos(2t))/17$
8. (a) $e^{-t} - e^{2t} + e^{3t}$ (b) $[3(e^t+1)\sin(2t) - 12(e^t-1)\cos(2t)]/17$
9. $-\frac{2}{3}te^{-t}$ e $c_1e^{2t} + \left(c_2 - \frac{2}{3}t\right)e^{-t}$