

### Análise 3 – Primeira avaliação – Gabarito

As soluções abaixo indicam os argumentos esperados. Naturalmente, outras demonstrações corretas, baseadas nos resultados estudados no curso, serão consideradas válidas.

#### Grupo I

**Questão 1.** Para cada  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , defina  $\|x\|_* = \sum_{j=1}^n j|x_j|$ .

- (a) Mostre que  $\|\cdot\|_*$  define uma norma em  $\mathbb{R}^n$ .

Claramente,  $\|x\|_* \geq 0$ . Além disso,

$$\|x\|_* = 0 \iff j|x_j| = 0 \text{ para todo } j \iff x = 0.$$

Para  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\|\lambda x\|_* = \sum_{j=1}^n j|\lambda x_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^n j|x_j| = |\lambda| \|x\|_*.$$

Finalmente, se  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|x + y\|_* = \sum_{j=1}^n j|x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^n j(|x_j| + |y_j|) = \|x\|_* + \|y\|_*.$$

Portanto,  $\|\cdot\|_*$  é uma norma em  $\mathbb{R}^n$ .

- (b) Encontre constantes  $\alpha, \beta > 0$  tais que  $\alpha\|x\|_{\max} \leq \|x\|_* \leq \beta\|x\|_{\max}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Como  $\|x\|_{\max} = \max\{|x_j|; 1 \leq j \leq n\}$ , temos

$$\|x\|_* = \sum_{j=1}^n j|x_j| \leq \left( \sum_{j=1}^n j \right) \|x\|_{\max} = \frac{n(n+1)}{2} \|x\|_{\max}.$$

Por outro lado, escolhendo  $j_0$  tal que  $|x_{j_0}| = \|x\|_{\max}$ ,

$$\|x\|_* \geq j_0|x_{j_0}| \geq |x_{j_0}| = \|x\|_{\max}.$$

Logo, basta tomar  $\alpha = 1$  e  $\beta = n(n+1)/2$ .

**Questão 2.** Sejam  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e considere em  $\mathbb{R}^n$  a norma euclidiana.

- (a) Prove que  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ .

Como

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2,$$

e

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

Somando as duas igualdades, temos

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

- (b) Suponha que  $\|x + y\| = \|x - y\|$ . Prove que  $x$  e  $y$  são ortogonais.

Se  $\|x + y\| = \|x - y\|$ , então  $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 0$ . Pelas expansões anteriores,  $4\langle x, y \rangle = 0$ . Logo  $\langle x, y \rangle = 0$ , ou seja,  $x$  e  $y$  são ortogonais.

**Questão 3.** Dada uma sequência de pontos  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{R}^n$  e um ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  fixado. Prove que  $x_k \rightarrow a$  se, e somente se  $x_{k_j} \rightarrow a_j$ , para  $j = 1, \dots, n$ .

Suponha primeiro que  $x_k \rightarrow a$ . Logo, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|x_k - a\| < \varepsilon, \text{ sempre que } k > k_0.$$

Como, para cada  $j = 1, \dots, n$ , temos  $|x_{k_j} - a_j| \leq \|x_k - a\|$ . Segue que  $x_{k_j} \rightarrow a_j$ , para  $j = 1, \dots, n$ .

Reciprocamente, suponha que  $x_{k_j} \rightarrow a_j$  para  $j = 1, \dots, n$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , para cada  $j$  existe  $k_j$  tal que

$$k \geq k_j \implies |x_{k_j} - a_j| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Tomando  $k_0 = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ , para  $k \geq k_0$  temos

$$\|x_k - a\|_S = \sum_{j=1}^n |x_{k_j} - a_j| < n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Portanto  $x_k \rightarrow a$ .

**Questão 4.** Seja  $\|\cdot\|_*$  uma norma em  $\mathbb{R}^n$  e considere o conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n; 1 < \|x\|_* \leq 2\}.$$

Recordemos também a desigualdade  $|\|x\|_* - \|y\|_*| \leq \|x - y\|_*$ .

(a) Verifique se  $A$  é aberto, fechado, limitado e compacto.

O conjunto  $A$  **não é aberto**. De fato, se  $\|x\|_* = 2$ , então  $x \in A$ , mas qualquer bola suficientemente pequena centrada em  $x$  contém pontos  $y$  com  $\|y\|_* > 2$ .

O conjunto  $A$  também **não é fechado**. De fato, se  $\|x\|_* = 1$ , então  $x \notin A$ , mas qualquer bola centrada em  $x$  contém pontos de  $A$ , logo  $x \in \bar{A}$ .

O conjunto  $A$  é **limitado**. Com efeito, como todas as normas em  $\mathbb{R}^n$  são equivalentes, existem constantes  $c, C > 0$  tais que  $c\|x\| \leq \|x\|_* \leq C\|x\|$ . Aqui  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana. Assim, para  $x \in A$ , temos

$$c\|x\| \leq \|x\|_* \leq 2,$$

e portanto  $\|x\| \leq 2/c$ .

Finalmente, como  $A$  não é fechado, pelo Teorema de Heine–Borel ele **não é compacto**.

(b) Encontre  $\bar{A}$  e  $\partial A$ , justificando suas respostas.

Afirmamos que  $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n; 1 \leq \|x\|_* \leq 2\}$ .

De fato, se  $1 < \|x\|_* \leq 2$ , então  $x \in A \subset \bar{A}$ . Falta verificar que se  $\|x\|_* = 1$  então  $x \in \bar{A}$ .

Tome uma sequência  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  com  $t_k \in (1, 2)$  e  $t_k \rightarrow 1$ . Então  $\|t_k x\|_* = t_k \in (1, 2)$  e  $t_k x \rightarrow x$ . Logo  $x \in \bar{A}$ .

Por outro lado, se  $\|x\|_* < 1$  ou  $\|x\|_* > 2$ , a desigualdade triangular reversa fornece uma bola centrada em  $x$  que não intersecta  $A$ . Portanto, tais pontos não pertencem a  $\bar{A}$ .

Além disso,  $\text{int}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n; 1 < \|x\|_* < 2\}$ . Consequentemente,

$$\partial A = \bar{A} \setminus \text{int}(A) = \{x; \|x\|_* = 1\} \cup \{x; \|x\|_* = 2\}.$$

## Grupo II

**Questão 5.** Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é chamado *estrelado em relação a um ponto*  $a \in A$  se, para todo  $x \in A$ , o segmento  $[a, x] = \{(1-t)a + tx; 0 \leq t \leq 1\}$  está contido em  $A$ . Prove que todo conjunto estrelado é conexo.

Para cada  $x \in A$ , considere o segmento  $A_x = [a, x]$ . Como  $A$  é estrelado em relação a  $a$ , então

$$A_x \subset A.$$

Note que cada segmento  $A_x$  é convexo e, portanto, conexo. Além disso, todos esses conjuntos  $A_x$  têm o ponto  $a$  em comum. Como a união de uma família de conjuntos conexos que possuem um ponto comum é conexa, concluímos que

$$A = \bigcup_{x \in A} A_x \text{ é conexo.}$$

**Questão 6.** Seja  $(x_k)$  uma sequência em  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que existam constantes  $C > 0$  e  $0 < q < 1$  tais que

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq Cq^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(a) Prove que  $(x_k)$  é uma sequência de Cauchy.

Sejam  $m > k$ . Pela desigualdade triangular,

$$\|x_m - x_k\| = \|(x_m - x_{m-1}) + \cdots + (x_{k+1} - x_k)\| \leq \sum_{j=k}^{m-1} \|x_{j+1} - x_j\|.$$

Usando a hipótese,

$$\|x_m - x_k\| \leq C \sum_{j=k}^{m-1} q^j \leq C \sum_{j=k}^{\infty} q^j = \frac{Cq^k}{1-q}.$$

Como  $0 < q < 1$ , então  $\frac{Cq^k}{1-q} \rightarrow 0$ . Portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_0$  tal que

$$k \geq k_0 \implies \frac{Cq^k}{1-q} < \varepsilon.$$

Assim, se  $m > k \geq k_0$ ,

$$\|x_m - x_k\| < \varepsilon.$$

Logo,  $(x_k)$  é uma sequência de Cauchy.

(b) Conclua que  $(x_k)$  é convergente.

Como  $\mathbb{R}^n$  é completo, toda sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}^n$  é convergente. Portanto,  $(x_k)$  converge em  $\mathbb{R}^n$ .

**Questão 7.** Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto e seja  $A \subset K$  um conjunto infinito.

Prove que existe um ponto  $a \in K$  tal que toda bola aberta centrada em  $a$  contém infinitos pontos de  $A$ .

Como  $K$  é compacto, pelo Teorema de Heine–Borel ele é limitado. Logo,  $A \subset K$  também é limitado.

Do fato de  $A$  ser infinito e limitado, segue do Teorema de Weierstrass, que  $A$  possui um ponto de acumulação, ou seja, existe  $a \in \bar{A}$ .

E como  $\bar{A} \subset \bar{K}$  e  $K$  é fechado, temos  $a \in \bar{K} = K$ .

Finalmente, pela caracterização dos pontos de acumulação, toda vizinhança de  $a$  contém infinitos pontos de  $A$ . Em particular, toda bola aberta centrada em  $a$  contém infinitos pontos de  $A$ .

## Grupo III

**Questão 8.** Sejam  $K, L \subset \mathbb{R}^n$  dois conjuntos não vazios, compactos e disjuntos.

Prove que existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|x - y\| \geq \delta, \quad x \in K, \quad y \in L.$$

Faça a demonstração utilizando apenas os resultados estudados para esta prova. Em particular, não utilize resultados sobre funções contínuas.

Suponha, por absurdo, que não exista  $\delta > 0$  com a propriedade desejada. Então, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existem  $x_k \in K$  e  $y_k \in L$ , tais que

$$\|x_k - y_k\| < \frac{1}{k}.$$

Como  $K$  é compacto, a sequência  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência  $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$  convergente para algum ponto  $x \in K$ , ou seja  $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j}$ .

Considere agora a subsequência  $(y_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$  correspondente em  $L$ . Como  $L$  é compacto, ela possui uma subsequência  $(y_{k_{j_\ell}})_{\ell \in \mathbb{N}}$  que converge para algum  $y \in L$ , ou seja,  $y = \lim_{\ell \rightarrow \infty} y_{k_{j_\ell}}$ .

Note que a correspondente subsequência  $(x_{k_{j_\ell}})$  continua convergindo para  $x$ . Além disso,

$$\|x_{k_{j_\ell}} - y_{k_{j_\ell}}\| < \frac{1}{k_{j_\ell}} \rightarrow 0.$$

Pela desigualdade triangular,

$$\|x - y\| \leq \|x - x_{k_{j_\ell}}\| + \|x_{k_{j_\ell}} - y_{k_{j_\ell}}\| + \|y_{k_{j_\ell}} - y\|.$$

Fazendo  $\ell \rightarrow \infty$ , obtemos  $\|x - y\| = 0$ , isto é,  $x = y$ . Mas  $x \in K$  e  $y \in L$ , o que contradiz  $K \cap L = \emptyset$ .

**Questão 9.** Seja  $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$  uma sequência decrescente de conjuntos compactos e não vazios de  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que

$$\text{diam}(K_j) \rightarrow 0, \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

- (a) Prove que existe um único ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j = \{a\}$ .

Pelo Teorema dos Compactos Encaixados,  $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \emptyset$ . Portanto, existe pelo menos um ponto  $a \in \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$ . Resta provar que este ponto é único.

Suponha que existam  $a, b \in \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$ . Então, para todo  $j$ ,  $a, b \in K_j$ , e, pela definição de diâmetro,

$$\|a - b\| \leq \text{diam}(K_j).$$

Como  $\text{diam}(K_j) \rightarrow 0$ , segue que  $\|a - b\| = 0$ . Logo,  $a = b$ . Portanto,  $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j = \{a\}$ .

- (b) Para cada  $j$ , escolha arbitrariamente  $x_j \in K_j$ . Prove que a sequência  $(x_j)$  converge para o ponto  $a$ .

Para cada  $j$ , temos  $x_j \in K_j$ . Como  $a$  pertence à interseção de todos os  $K_j$ , então  $a \in K_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Logo

$$\|x_j - a\| \leq \text{diam}(K_j).$$

Como o lado direito tende a zero, temos  $\|x_j - a\| \rightarrow 0$ , e  $x_j \rightarrow a$ .