

Análise 3 - Primeira avaliação - 11/09/2026

Nome: _____

Instruções. A prova está dividida em três grupos de questões.

- **Grupo I:** resolva **duas** das quatro questões. Cada uma vale 1,5 pontos.
- **Grupo II:** resolva **duas** das três questões. Cada uma vale 2,0 pontos.
- **Grupo III:** resolva **uma** das duas questões, valendo 3,0 pontos.

Todas as respostas devem ser devidamente justificadas. Resultados vistos em aula podem ser utilizados, desde que sejam claramente indicados.

Grupo I

Questão 1. Para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, defina $\|x\|_* = |x_1| + 2|x_2| + \dots + n|x_n|$.

- (a) Mostre que $\|\cdot\|_*$ define uma norma em $\mathbb{R}^n$.
- (b) Encontre constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha\|x\|_{\max} \leq \|x\|_* \leq \beta\|x\|_{\max}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Questão 2. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e considere em $\mathbb{R}^n$ a norma euclidiana.

- (a) Prove que $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
- (b) Suponha que $\|x + y\| = \|x - y\|$. Prove que x e y são ortogonais.

Questão 3. Considere uma sequência de pontos $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ e um ponto $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ fixado. Prove que $x_k \rightarrow a$ se, e somente se $x_{kj} \rightarrow a_j$, para $j = 1, \dots, n$.

Obs.: Não basta citar o resultado, é preciso demonstrá-lo.

Questão 4. Seja $\|\cdot\|_*$ uma norma em $\mathbb{R}^n$ e considere o conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n; 1 < \|x\|_* \leq 2\}.$$

- (a) Verifique se A é aberto, fechado, limitado e compacto.
- (b) Encontre $\overline{A}$ e ∂A , justificando suas respostas.

Grupo II

Questão 5. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado *estrelado em relação a um ponto* $a \in A$ se, para todo $x \in A$, o segmento $[a, x] = \{(1 - t)a + tx; 0 \leq t \leq 1\}$ está inteiramente contido em A .

Prove que todo conjunto estrelado é conexo.

Questão 6. Seja (x_k) uma sequência em $\mathbb{R}^n$. Suponha que existam constantes $C > 0$ e $0 < q < 1$ tais que

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq Cq^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- (a) Prove que (x_k) é uma sequência de Cauchy.
- (b) Conclua que (x_k) é convergente.

Questão 7. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e seja $A \subset K$ um conjunto infinito.

Prove que existe um ponto $a \in K$ tal que toda bola aberta centrada em a contém infinitos pontos de A .

Grupo III

Questão 8. Sejam $K, L \subset \mathbb{R}^n$ dois conjuntos não vazios, compactos e disjuntos.

Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\| \geq \delta, \quad x \in K, \quad y \in L.$$

Faça a demonstração utilizando apenas os resultados estudados para esta prova. Em particular, não utilize resultados sobre funções contínuas.

Questão 9. Seja $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \cdots$ uma sequência decrescente de conjuntos compactos e não vazios de $\mathbb{R}^n$. Suponha que

$$\text{diam}(K_j) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } j \longrightarrow \infty.$$

- (a) Prove que existe um único ponto $a \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j = \{a\}.$$

- (b) Para cada j , escolha arbitrariamente $x_j \in K_j$. Prove que a sequência (x_j) converge para o ponto a .

Obs.: Para cada conjunto não vazio e limitado $B \subset \mathbb{R}^n$, define-se o diâmetro de B por

$$\text{diam}(B) = \sup\{\|x - y\|; x, y \in B\}.$$