## Problemas

1. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, x \geq 0 \\ \\ 0, x < 0, \end{cases}$$

*(a)* Mostre que esta é uma f.d.p.
*(b)* Calcule a probabilidade de $X > 10$.

2. Uma v.a. $X$ tem distribuição triangular no intervalo $[0, 1]$ se sua f.d.p. for dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Cx, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ C(1-x), & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

*(a)* Qual valor deve ter a constante $C$?
*(b)* Faça o gráfico de $f(x)$.
*(c)* Determine $P(X \leq 1/2)$, $P(X > 1/2)$ e $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$.

3. Suponha que estamos atirando dardos num alvo circular de raio 10 cm, e seja $X$ a distância do ponto atingido pelo dardo ao centro do alvo. A f.d.p. de $X$ é

$$f(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ \\ 0, & \text{para os demais valores.} \end{cases}$$

*(a)* Qual a probabilidade de acertar o centro do alvo, se esse for um círculo de 1 cm de raio?
*(b)* Mostre que a probabilidade de acertar qualquer círculo concêntrico é proporcional à sua área.

4. Encontre o valor da constante $c$ se

$$f(x) = \begin{cases} c/x^2, & x \geq 10 \\ 0, & x < 10 \end{cases}$$

for uma densidade. Encontre $P(X > 15)$.

## 7.2 Valor Médio de uma Variável Aleatória Contínua

Do que foi visto até aqui, deduz-se que qualquer função $f(\cdot)$, não-negativa, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

define uma v.a. contínua $X$, ou seja, cria um modelo teórico para as freqüências relativas de uma v.a. contínua. A área compreendida entre dois valores, $a$ e $b$, da abscissa $x$, sob a curva representativa de $f(x)$, dá a probabilidade (proporção teórica) da variável pertencer ao intervalo limitado pelos dois valores. Usando o conceito de integral, podemos escrever

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{7.1}$$

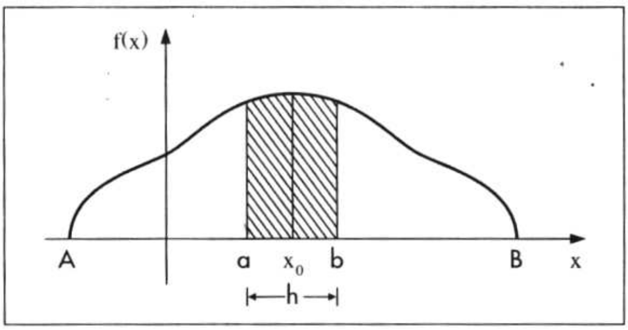
Vejamos agora como podemos definir a esperança (valor médio ou média) de uma v.a. contínua. Para isso, usaremos um artifício semelhante àquele usado na seção 3.1 para calcular a média das variáveis quantitativas, com os dados agrupados em classes. Lá substituímos todos os valores de um intervalo (classe) por um único valor aproximado (o ponto médio do intervalo), e agimos como se a variável fosse do tipo discreto. Aqui iremos repetir esse artifício.

Consideremos a v.a. $X$ com função densidade $f(x)$ e dois pontos $a$ e $b$, bem próximos, isto é, $h = b - a$ é pequeno, e consideremos $x_0$ o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Observando a Figura 7.5 é fácil verificar que

$$P(a \leqslant X \leqslant b) \simeq h f(x_0), \tag{7.2}$$

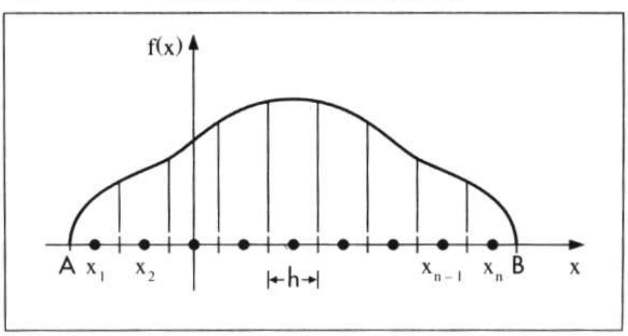
o que significa aproximar a área da parte hachurada pelo retângulo de base $h$ e altura $f(x_0)$. É fácil ver que a aproximação melhora com $h$ tendendo a zero.

Figura 7.5: Área hachurada representa P(a ≤ X ≤ b).




Dividamos agora o intervalo $[A, B]$, onde $f(x) > 0$, em $n$ partes de amplitudes iguais a $h = (B - A)/n$ (Figura 7.6) e consideremos os pontos médios desses intervalos, $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Figura 7.6: Partição do intervalo [A, B].



Consideremos a v.a. $Y_n$, assumindo os valores $x_1, ..., x_n$ com as probabilidades

$$p_i = P(Y_n = x_i) \simeq f(x_i)h.$$

Dessa maneira, e de acordo com a definição de esperança, temos

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \approx \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)h,$$

que será uma aproximação da esperança $E(X)$. Para determinar $E(X)$ com maior precisão, podemos aumentar o número de intervalos, diminuindo sua amplitude $h$. No limite, quando $h \to 0$, teremos o valor de $E(X)$. Definamos, pois,

$$E(X) = \lim_{n \to \infty} E(Y_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)h. \tag{7.3}$$

Mas da definição de integral (veja Morettin *et alli*, 1999), temos que, se o limite (7.3) existe, ele define a integral de $x\,f(x)$ entre A e B, isto é,

$$E(X) = \int_A^B x f(x) dx. \tag{7.4}$$

Exemplo 7.3. Continuando com o Exemplo 7.2, observamos que, dividindo o intervalo [0, 1] em $n$ subintervalos, teremos $h = 1/n$, $x_i = (2i-1)/2n$ e $f(x_i) = (2i-1)/n$, $i = 1, 2,..., n$. Portanto,

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(\frac{2i-1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^3} \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2$$

$$= \frac{1}{2n^3} \left\{\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}\right\} = \frac{1}{6}\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right),$$

na qual usamos o conhecido resultado que dá a soma dos quadrados dos primeiros $n$ números ímpares. Logo,

$$E(X) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6}\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3}.$$

O mesmo resultado é obtido diretamente da relação (7.4):

$$E(X) = \int_0^1 (x)(2x)dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Exemplo 7.4. No caso do relógio elétrico do Exemplo 7.1, obtemos

$$E(X) = \int_0^{360} x\,\frac{1}{360}\,dx = \left[\frac{1}{360}\,\frac{x^2}{2}\right]_0^{360} = 180,$$

que é o valor esperado devido à distribuição uniforme das freqüências teóricas.

Como a função $f(x)$ é sempre não-negativa, podemos escrever a esperança como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \tag{7.5}$$

A extensão do conceito de variância para v.a. contínuas é feita de maneira semelhante e o equivalente à expressão (6.2) é

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx. \tag{7.6}$$

Exemplo 7.5. Para os dois exemplos vistos anteriormente, teremos:
(i) Para o caso do relógio,

$$\mathrm{Var}(X) = \int_0^{360} (x - 180)^2 \frac{1}{360}\, dx = \frac{1}{360} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{360x^2}{2} + 180^2 x\right]_0^{360} = 10.800;$$

(ii) Para o exemplo 7.2,

$$\mathrm{Var}(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 2x dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{9} + \frac{2x^2}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{18}.$$

Como no caso de v.a. discretas, o desvio padrão de uma v.a. contínua $X$ é definido como

$$DP(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}, \tag{7.7}$$

que é dado na mesma unidade de medida do que $X$. Deixamos a cargo do leitor a verificação de que o seguinte resultado vale, como conseqüência de (7.6):

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \tag{7.8}$$

Como frisamos no Capítulo 6, freqüentemente usaremos outros símbolos para indicar os parâmetros discutidos, a saber:

$$E(X) = \mu(X),$$
$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2(X),$$
$$DP(X) = \sigma(X),$$

ou simplesmente $\mu$, $\sigma^2$ e $\sigma$, respectivamente, se não houver possibilidade de confusão.

## 7.3 Função de Distribuição Acumulada

Dada uma v.a. $X$ com função densidade de probabilidade $f(x)$, podemos definir a sua função de distribuição acumulada, $F(x)$, do mesmo modo como foi definida no Capítulo 6:

$$F(x) = P(X \leq x), -\infty < x < \infty. \tag{7.9}$$

De (7.1) segue-se que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \tag{7.10}$$

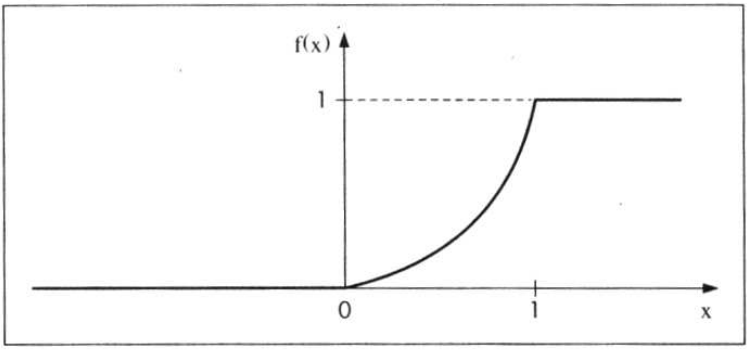
para todo real $x$.

Exemplo 7.6. Retomemos o Exemplo 7.2. Temos

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \int_0^x 2tdt = x^2, & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ \int_0^1 2tdt + \int_1^x 0dt = 1, & \text{se } x \geqslant 1. \end{cases}$$

O gráfico de $F(x)$ está na Figura 7.7.

Figura 7.7: f.d.a. da v.a. $X$ do exemplo 7.6.




De (7.9), vemos que $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, para todo $x$ real; além disso, $F(x)$ é não-decrescente e possui as duas seguintes propriedades:

(i) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$,

(ii) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

No exemplo 7.6 temos, efetivamente, $F(x) = 0$, para $x < 0$ e $F(x) = 1$, para $x \geqslant 1$.

Para v.a. contínuas, o seguinte resultado é importante.

Proposição 7.1. Para todos os valores de $x$ para os quais $F(x)$ é derivável temos

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Vamos usar esse resultado no exemplo a seguir.

Exemplo 7.7. Suponha que

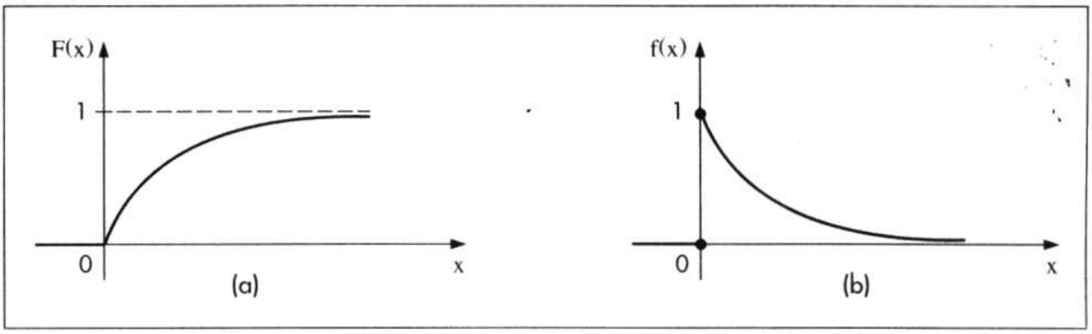
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

seja a f.d.a. de uma v.a. $X$. Então,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ e^{-x}, & \text{se } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Na Figura 7.8 temos os gráficos dessas duas funções. Veremos que f(x) é um caso especial da densidade exponencial.

Figura 7.8: Distribuição exponencial ($\beta = 1$) (a) f.d.a. (b) f.d.p.




Se $a$ e $b$ forem dois números reais quaisquer,

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a). \tag{7.11}$$

Esse resultado não será afetado se incluirmos ou não os extremos $a$ e $b$ na desigualdade entre parênteses.

## Problemas

5. Calcule a esperança, a variância e a f.d.a. da v.a. $X$ do problema 2.

6. Determine a esperança e a variância da v.a. cuja f.d.p. é

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}\, x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

7. Calcule a média da v.a. $X$ do problema 4.

8. A v.a. contínua $X$ tem f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Se $b$ for um número que satisfaz $-1 < b < 0$, calcule $P(X > b \mid X < b/2)$.
(b) Calcule $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

9. Certa liga é formada pela mistura fundida de dois metais. A liga resultante contém certa porcentagem de chumbo, $X$, que pode ser considerada uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \frac{3}{5}\, 10^{-5}\, x(100 - x),\ 0 \leq x \leq 100.$$

Suponha que $L$, o lucro líquido obtido na venda dessa liga (por unidade de peso), seja dado por $L = C_1 + C_2X$. Calcule $E(L)$, o lucro esperado por unidade.

10. A demanda diária de arroz num supermercado, em centenas de quilos, é uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 2x/3, & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ -x/3 + 1, & \text{se } 1 \leqslant x < 3 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 3. \end{cases}$$

(a) Qual a probabilidade de se vender mais do que 150 kg, num dia escolhido ao acaso?

(b) Em 30 dias, quanto o gerente do supermercado espera vender?

(c) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição dos clientes diariamente para que não falte arroz em 95% dos dias?

11. Suponha que $X$ tenha f.d.p. $f(x)$ do problema 1. Calcule $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

12. Seja $X$ com densidade

$$f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2), & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule a média e a variância de $X$.

## 7.4 Alguns Modelos Probabilísticos para Variáveis Aleatórias Contínuas

De modo geral, podemos dizer que as v.a. cujos valores resultam de algum processo de mensuração são v.a. contínuas. Alguns exemplos são:

(a) o peso ou a altura das pessoas de uma cidade;

(b) a demanda diária de arroz num supermercado;

(c) o tempo de vida de uma lâmpada;

(d) o diâmetro de rolamentos de esferas; e

(e) erros de medidas em geral, resultantes de experimentos em laboratórios.

Dada uma v.a. contínua $X$, interessa saber qual a f.d.p. de $X$. Alguns modelos são freqüentemente usados para representar a f.d.p. de v.a. contínuas. Alguns dos mais utilizados serão descritos a seguir e, para uniformizar o estudo desses modelos, iremos em cada caso analisar:

(a) definição;

(b) gráfico da f.d.p.;

(c) momentos: $E(X)$, $\text{Var}(X)$;

(d) função de distribuição acumulada (f.d.a.).

Outros modelos serão apresentados na seção 7.7.

## 7.4.1 O Modelo Uniforme

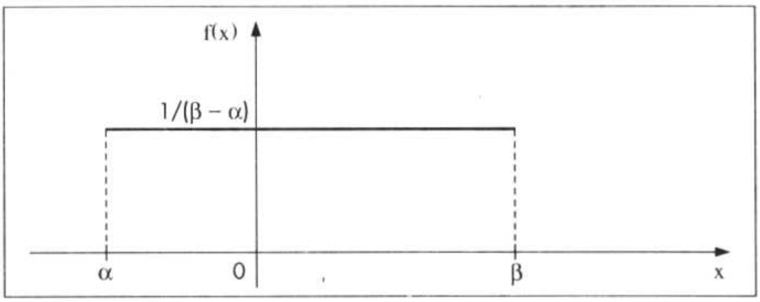
O modelo uniforme é uma generalização do modelo estudado no Exemplo 7.1 e é o modelo mais simples para v.a. contínuas.

(a) Definição. A v.a. $X$ tem distribuição uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$ se sua f.d.p. é dada por

$$f(x;\,\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha}, & \text{se } \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{7.12}$$

(b) Gráfico. A Figura 7.9 representa a função dada por (7.12).

Figura 7.9: Distribuição uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$.




(c) Momentos. Pode-se mostrar (veja o problema 29) que

$$E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}, \tag{7.13}$$

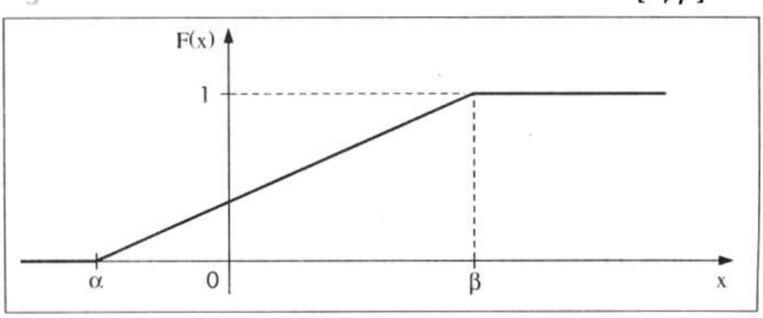
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}. \tag{7.14}$$

(d) F.d.a. A função de distribuição acumulada da uniforme é fácil de ser encontrada (veja o problema 29):

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } x < \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{se } \alpha \leqslant x < \beta \\ 1, & \text{se } x \geqslant \beta, \end{cases} \tag{7.15}$$

cujo gráfico está na Figura 7.10.

Figura 7.10: f.d.a. de uma v.a. uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$.



Assim, para dois valores quaisquer $c$ e $d$, $c < d$, teremos

$$P(c < X \leqslant d) = F(d) - F(c),$$

que é obtida facilmente de (7.15).

Usaremos a notação

$$X \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta)$$

para indicar que a v.a. $X$ tem distribuição uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$.

Exemplo 7.8. Um caso particular bastante interessante é aquele em que $\alpha = -1/2$ e $\beta = 1/2$. Indicando essa v.a. por $U$, teremos

$$f(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } -1/2 \leqslant u \leqslant 1/2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nessa situação temos que

$$E(U) = 0, \text{Var}(U) = 1/12$$

e a f.d.a. é dada por

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u < -1/2 \\ u + 1/2, & \text{se } -1/2 \leqslant u < 1/2 \\ 1, & \text{se } u > 1/2. \end{cases}$$

Por exemplo,

$$P(-1/4 \leqslant \mathrm{U} \leqslant 1/4) = F_U(1/4) - F_U(-1/4) = 1/2.$$

Se quiséssemos facilitar o nosso trabalho, poderíamos tabelar os valores da f.d.a para essa variável $U$. Devido à simetria da área em relação a $x = 0$, poderíamos construir uma tabela indicando a função $G(u)$, tal que

$$G(u) = P(0 \leqslant U \leqslant u)$$

para alguns valores de $u$ (veja o problema 30).

Dada uma v.a. uniforme $X$ qualquer, com parâmetros $\alpha$ e $\beta$, podemos definir a v.a. $U$ como

$$U = \frac{X - \dfrac{\beta + \alpha}{2}}{\beta - \alpha}. \tag{7.16}$$

Segue-se que a transformação (7.16) leva uma uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$ numa uniforme no intervalo $[-1/2, 1/2]$ e para dois números quaisquer $c$ e $d$, com $c < d$,

$$P(c < X \leqslant d) = F(d) - F(c) = P\left(\frac{c - \dfrac{\beta + \alpha}{2}}{\beta - \alpha} < U \leqslant \frac{d - \dfrac{\beta + \alpha}{2}}{\beta - \alpha}\right) = F_U\left(\frac{d - \dfrac{\beta + \alpha}{2}}{\beta - \alpha}\right) - F_U\left(\frac{c - \dfrac{\beta + \alpha}{2}}{\beta - \alpha}\right).$$

Artifícios semelhantes a esse são muito úteis na construção de tabelas e programas para cálculos de probabilidades referentes a famílias de modelos.

## 7.4.2 O Modelo Normal

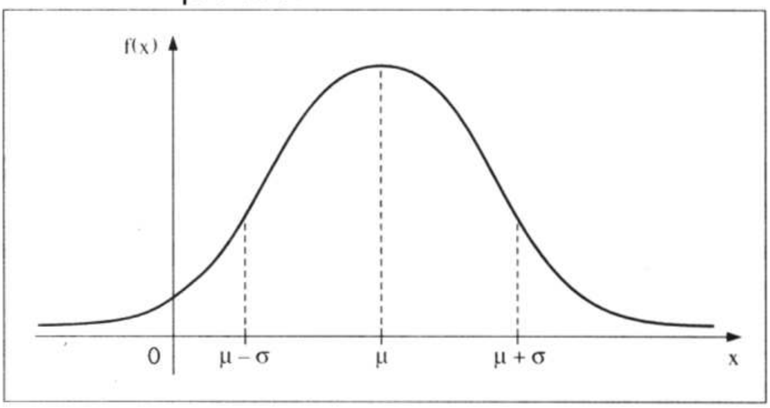
Vamos introduzir, agora, um modelo fundamental em probabilidades e inferência estatística. Suas origens remontam a Gauss em seus trabalhos sobre erros de observações astronômicas, por volta de 1810, donde o nome de distribuição *gaussiana* para tal modelo.

(a) Definição. Dizemos que a v.a. $X$ tem *distribuição normal* com parâmetros $\mu$ e $\sigma^2$, $-\infty < \mu < +\infty$ e $0 < \sigma^2 < \infty$, se sua densidade é dada por

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, -\infty < x < \infty. \quad (7.17)$$

(b) Gráfico. A Figura 7.11 ilustra uma particular *curva normal*, determinada por valores particulares de $\mu$ e $\sigma^2$.

Figura 7.11: f.d.p. de uma v.a. normal com média $\mu$ e desvio padrão $\sigma$.




(c) Momentos. Pode-se demonstrar que (veja o problema 32):

$$E(X) = \mu, \quad (7.18)$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2. \quad (7.19)$$

Além disso, $f(x; \mu; \sigma^2) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$, $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são pontos de inflexão de $f(x; \mu, \sigma^2)$, $x = \mu$ é ponto de máximo de $f(x; \mu, \sigma^2)$, e o valor máximo é $1/\sigma\sqrt{2\pi}$. A densidade $f(x; \mu, \sigma^2)$ é simétrica em relação à reta $x = \mu$, isto é,

$$f(\mu + x; \mu, \sigma^2) = f(\mu - x; \mu, \sigma^2), \quad (7.20)$$

para todo $x$ real.

Para simplificar a notação, denotaremos a densidade da normal simplesmente por $f(x)$ e escreveremos, simbolicamente,

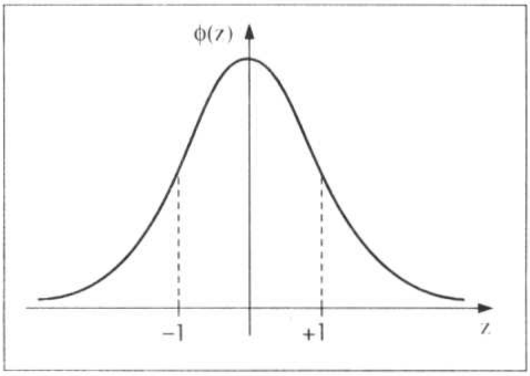
$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, temos uma distribuição *padrão* ou *reduzida*, ou brevemente $N(0,1)$. Para essa a função densidade reduz-se a

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, -\infty < z < \infty. \quad (7.21)$$

O gráfico da normal padrão está na Figura 7.12.

Figura 7.12: f.d.p. de uma v.a. normal padrão: $Z \sim N(0, 1)$.




Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, então a v.a. definida por

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \tag{7.22}$$

terá média zero e variância 1 (prove esses fatos). O que não é tão fácil mostrar é que $Z$ também tem distribuição normal. Isso não será feito aqui.

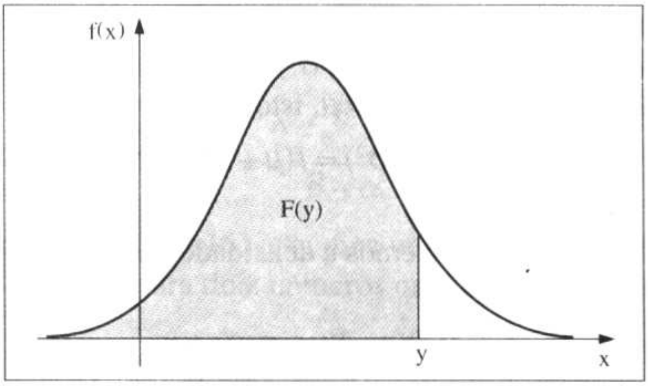
A transformação (7.22) é fundamental para calcularmos probabilidades relativas a uma distribuição normal qualquer.

(d) F.d.a. A f.d.a. $F(y)$ de uma v.a. normal $X$, com média $\mu$ e variância $\sigma^2$ é obtida integrando-se (7.17) de $-\infty$ até $y$, ou seja,

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x; \mu, \sigma^2)dx, \quad y \in IR. \tag{7.23}$$

A integral (7.23) corresponde à área, sob $f(x)$, desde $-\infty$ até $y$, como ilustra a Figura 7.13.

Figura 7.13: Representação gráfica de $F(y)$ como área.

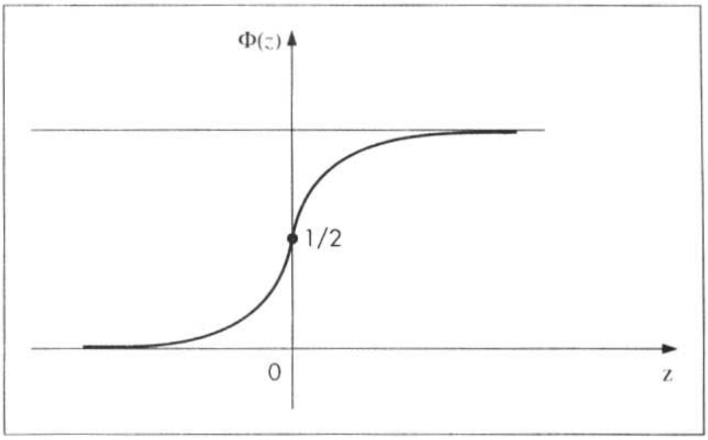



No caso específico da normal padrão, utilizamos a seguinte notação, que é universal:

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \phi(z)dz = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{y} e^{-z^2/2}\, dz. \tag{7.24}$$

O gráfico de $\Phi(z)$ é ilustrado na Figura 7.14.

Figura 7.14: f.d.c. da normal padrão.

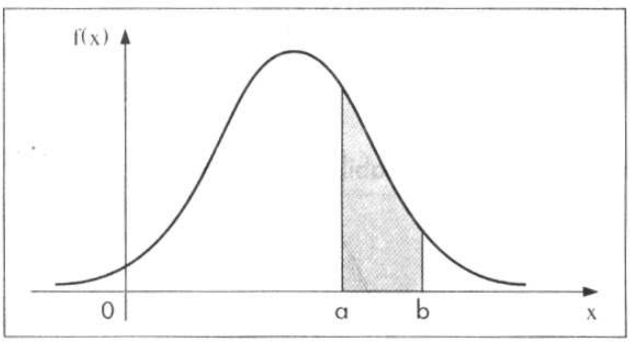



Suponha, então, que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e que queiramos calcular

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx, \tag{7.25}$$

onde $f(x)$ é dada por (7.17). Ver Figura 7.15.

Figura 7.15: Ilustração gráfica da $P(a \leq X \leq b)$ para uma v.a. normal.



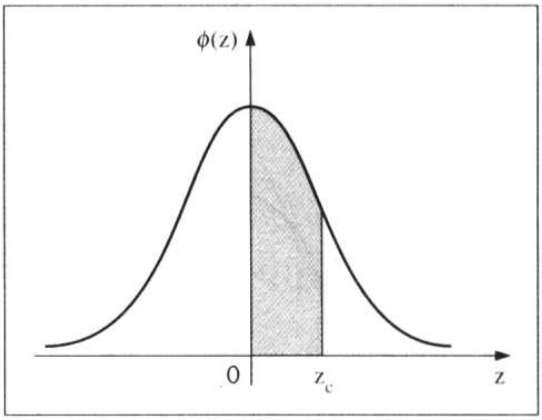

A integral (7.25) não pode ser calculada analiticamente, e portanto a probabilidade indicada só poderá ser obtida, aproximadamente, por meio de integração numérica. No entanto, para *cada* valor de $\mu$ e *cada* valor de $\sigma$, teríamos de obter $P(a < X < b)$ para diversos valores de $a$ e $b$. Essa tarefa é facilitada através do uso de (7.22), de sorte que somente é necessário construir uma tabela para a distribuição normal padrão.

Vejamos, então, como obter probabilidades a partir da Tabela III. Essa tábua dá as probabilidades sob uma curva normal padrão, que nada mais são do que as correspondentes áreas sob a curva. A Figura 7.16 ilustra a probabilidade fornecida pela tábua, a saber,

$$P(0 \leq Z \leq z_c),$$

onde $Z \sim N(0,1)$.

Figura 7.16: $P(0 \leqslant Z \leqslant z_c)$ fornecido pela Tabela III.




Se tomarmos, por exemplo, $z_c = 1{,}73$, segue-se que

$$P(0 \leqslant Z \leqslant 1{,}73) = 0{,}4582.$$

Calculemos mais algumas probabilidades (Figura 7.17):

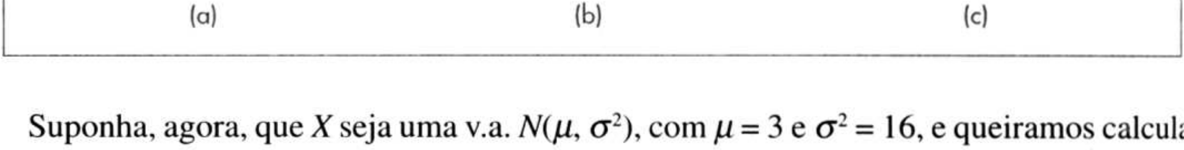
(a) $P(-1{,}73 \leqslant Z \leqslant 0) = P(0 \leqslant Z \leqslant 1{,}73) = 0{,}4582$, devido à simetria da curva.

(b) $P(Z \geqslant 1{,}73) = 0{,}5 - P(0 \leqslant Z \leqslant 1{,}73) = 0{,}5 - 0{,}4582 = 0{,}0418$, pois $P(Z \geqslant 0) = 0{,}5 = P(Z \leqslant 0)$.

(c) $P(Z < -1{,}73) = P(Z > 1{,}73) = 0{,}0418$.

(d) $P(0{,}47 \leqslant Z \leqslant 1{,}73) = P(0 \leqslant Z \leqslant 1{,}73) - P(0 \leqslant Z \leqslant 0{,}47) =$
$= 0{,}4582 - 0{,}1808 = 0{,}2774$.

Figura 7.17: Ilustração do cálculo de probabilidades para a $N(0,1)$.




Suponha, agora, que $X$ seja uma v.a. $N(\mu, \sigma^2)$, com $\mu = 3$ e $\sigma^2 = 16$, e queiramos calcular $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$. Utilizando (7.22), temos

$$P(2 \leqslant X \leqslant 5) = P\left(\frac{2-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{5-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{2-3}{4} \leqslant Z \leqslant \frac{5-3}{4}\right) = P\left(-\frac{1}{4} \leqslant Z \leqslant \frac{1}{2}\right).$$

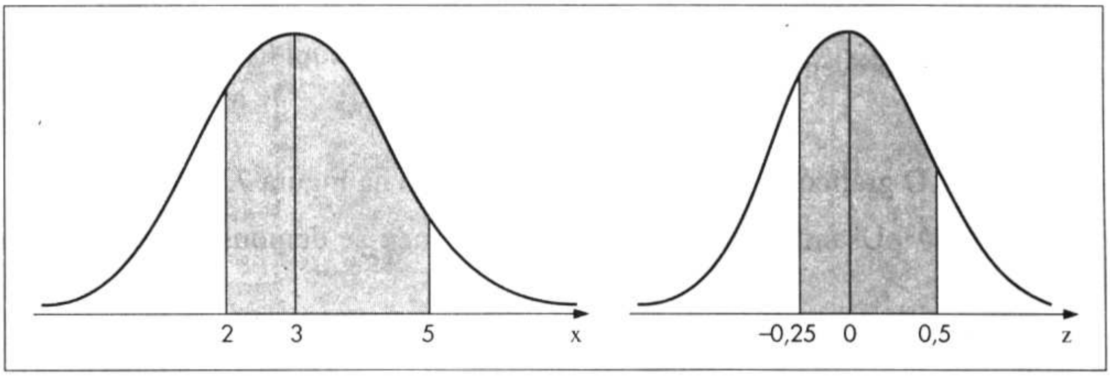
Portanto, a probabilidade de que $X$ esteja entre 2 e 5 é igual à probabilidade de que $Z$ esteja entre $-0{,}25$ e $0{,}5$ (Figura 7.18). Utilizando a Tabela III, vemos que

$$P(-0{,}25 \leqslant Z \leqslant 0{,}5) = 0{,}0987 + 0{,}1915 = 0{,}2902,$$

ou seja,

$$P(2 \leqslant X \leqslant 5) = 0{,}2902.$$

Figura 7.18: Ilustração do cálculo de $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$ para a v.a. $N(3, 16)$.




Exemplo 7.9 Os depósitos efetuados no Banco da Ribeira durante o mês de janeiro são distribuídos normalmente, com média de \$10.000,00 e desvio padrão de \$1.500,00. Um depósito é selecionado ao acaso dentre todos os referentes ao mês em questão. Encontrar a probabilidade de que o depósito seja:

(a) \$10.000,00 ou menos;

(b) pelo menos \$10.000,00;

(c) um valor entre \$12.000,00 e \$15.000,00;

(d) maior do que \$20.000,00.

Temos que $\mu = 10.000$ e $\sigma = 1.500$. Seja a v.a. $X$ = depósito.

(a) $P(X \leqslant 10.000) = P\left(Z \leqslant \dfrac{10.000 - 10.000}{1.500}\right) = P(Z \leqslant 0) = 0{,}5.$

(b) $P(X \geqslant 10.000) = P(Z \geqslant 0) = 0{,}5.$

(c) $P(12.000 < X < 15.000) = P\left(\dfrac{12.000 - 10.000}{1.500} < Z < \dfrac{15.000 - 10.000}{1.500}\right)$

$= P(4/3 < Z < 10/3) = P(1{,}33 < Z < 3{,}33) = 0{,}09133.$

(d) $P(X > 20.000) = P\left(Z > \dfrac{20.000 - 10.000}{1.500}\right) = P(Z > 6{,}67) \simeq 0.$

### 7.4.3 O Modelo Exponencial

Outra distribuição importante e que tem aplicações em confiabilidade de sistemas, assunto de que já tratamos brevemente no Capítulo 5, é a exponencial.

(a) Definição. A v.a. $T$ tem *distribuição exponencial* com parâmetro $\beta > 0$ se sua f.d.p. tem a forma

$$f(t;\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-t/\beta}, & \text{se } t \geqslant 0 \\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases} \tag{7.26}$$

Escreveremos, brevemente,

$$T \sim \text{Exp}(\beta).$$

(b) Gráfico. O gráfico de $f(t;\beta) = f(t)$ está ilustrado na Figura 7.8 (b), com $\beta = 1$.

(c) Momentos. Usando integração por partes, pode-se demonstrar que (veja o problema 41):

$$E(T) = \beta, \tag{7.27}$$

$$\text{Var}(T) = \beta^2. \tag{7.28}$$

Exemplo 7.10. O tempo de vida (em horas) de um transistor pode ser considerado uma v.a com distribuição exponencial com $\beta = 500$. Segue-se que a vida média do transistor é $E(T) = 500$ horas e a probabilidade de que ele dure mais do que a média é

$$P(T > 500) = \int_{500}^{\infty} f(t)dt = 1/500 \int_{500}^{\infty} e^{-t/500}\, dt$$

$$= 1/500\,[-500e^{-t/500}]_{500}^{\infty} = e^{-1} = 0{,}3678.$$

(d) F.d.a. Usando a definição (7.10), obtemos

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-t/\beta}, & \text{se } t \geqslant 0. \end{cases} \tag{7.29}$$

O gráfico de $F(t)$ está na Figura 7.8 (a), com $\beta = 1$.

## 7.5 Aproximação Normal à Binomial

Suponha que a v.a. $Y$ tenha uma distribuição binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 1/2$ e queiramos calcular $P(Y \geqslant 7)$. Embora seja uma v.a. discreta, vimos no Capítulo 2 que é possível representá-la por meio de um histograma, como na Figura 7.19. Vemos que $P(Y = 7)$ é igual à área do retângulo de base unitária e altura igual a $P(Y = 7)$, similarmente para $P(Y = 8)$ etc. Logo, $P(Y \geqslant 7)$ é igual à soma das áreas dos retângulos hachurados na Figura 7.19.

A idéia é aproximar tal área pela área sob uma curva normal, à *direita* de 6,5. Qual curva normal? Parece razoável considerar aquela normal de média

$$\mu = np = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

e variância

$$\sigma^2 = np(1-p) = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2{,}5.$$

Veja a Figura 7.20.

Figura 7.19: $(P(Y \geqslant 7)$ para $Y \sim b(10, 1/2)$.

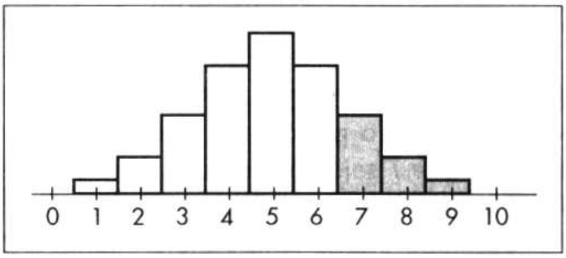
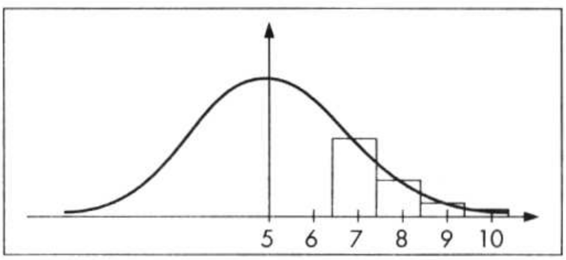



Figura 7.20: Aproximação de $P(Y \geqslant 7)$ pela área sob a $N(5; 2{,}5)$.




Chamando $X$ tal variável, com distribuição normal,

$$P(Y \geqslant 7) \simeq P(X \geqslant 6{,}5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geqslant \frac{6{,}5-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P\left(Z \geqslant \frac{6{,}5-5}{\sqrt{2{,}5}}\right) = P(Z \geqslant 0{,}94) = 0{,}174,$$

onde $Z$ é, como sempre, $N(0, 1)$. Utilizando a Tabela I, vemos que a probabilidade verdadeira é 0,172.

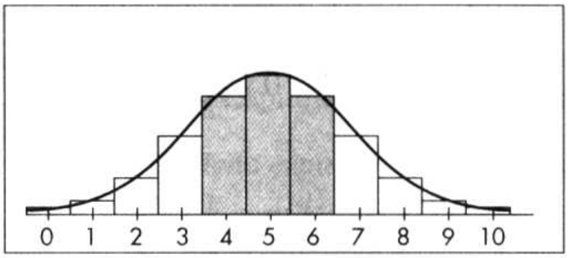
Vamos calcular agora $P(3 < Y \leqslant 6) = P(Y = 4) + P(Y = 5) + P(Y = 6)$. Vemos, através da Figura 7.21, que a aproximação a ser feita deve ser

$$P(3 < Y \leqslant 6) \simeq P(3{,}5 \leqslant X \leqslant 6{,}5) = P\left(\frac{3{,}5-5}{1{,}58} \leqslant Z \leqslant \frac{6{,}5-6}{1{,}58}\right)$$

$$= P(-0{,}94 \leqslant Z \leqslant 0{,}94) = 0{,}653,$$

ao passo que a probabilidade verdadeira é 0,656.

Figura 7.21: Aproximação de $P(3 < Y \leq 6)$.




A justificativa formal de tal aproximação é dada pelo chamado Teorema Limite Central, que será visto no Capítulo 10.

## Problemas

13. A temperatura $T$ de destilação do petróleo é crucial na determinação da qualidade final do produto. Suponha que $T$ seja considerada uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo (150, 300). Suponha que o custo para produzir um galão de petróleo seja $C_1$ reais. Se o óleo for destilado a uma temperatura inferior a 200°, o produto obtido é vendido a $C_2$ reais; se a temperatura for superior a 200°, o produto é vendido a $C_3$ reais.
   (a) Fazer o gráfico da f.d.p. de $T$.
   (b) Qual o lucro médio por galão?

14. Se $X \sim N(10, 4)$, calcular:
   (a) $P(8 < X < 10)$,
   (b) $P(9 \leq X \leq 12)$,
   (c) $P(X > 10)$,
   (d) $P(X < 8 \text{ ou } X > 11)$.

15. Para $X \sim N(100, 100)$, calcule:
   (a) $P(X < 115)$,
   (b) $P(X \geq 80)$,
   (c) $P(|X - 100| \leq 10)$,
   (d) o valor $a$, tal que $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0{,}95$.

16. Para a v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, encontre:
   (a) $P(X \leq \mu + 2\sigma)$,
   (b) $P(|X - \mu| \leq \sigma)$,
   (c) o número $a$ tal que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0{,}99$,
   (d) o número $b$ tal que $P(X > b) = 0{,}90$.

17. As alturas de 10.000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal, com média 170 cm e desvio padrão 5 cm.
   (a) Qual o número esperado de alunos com altura superior a 165 cm?
   (b) Qual o intervalo simétrico em torno da média que conterá 75% das alturas dos alunos?

18. As vendas de determinado produto têm distribuição aproximadamente normal, com média 500 unidades e desvio padrão 50 unidades. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada?

19. Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos, $D_1$ e $D_2$, tenham distribuições $N(42, 36)$ e $N(45, 9)$, respectivamente. Se os aparelhos são feitos para ser usados por um período de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido? E se for por um período de 49 horas?

20. O diâmetro $X$ de rolamentos esféricos produzidos por uma fábrica tem distribuição $N(0{,}6140; (0{,}0025)^2)$. O lucro $T$ de cada rolamento depende de seu diâmetro. Assim,
$T = 0{,}10$, se o rolamento for bom $(0{,}610 < X < 0{,}618)$;
$T = 0{,}05$, se o rolamento for recuperável $(0{,}608 < X < 0{,}610)$ ou $(0{,}618 < X < 0{,}620)$;
$T = -0{,}10$, se o rolamento for defeituoso $(X < 0{,}608$ ou $X > 0{,}620)$.
Calcule:
(a) as probabilidades de que os rolamentos sejam bons, recuperáveis e defeituosos.
(b) $E(T)$.

21. Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida $X$ (em 1.000 horas) que possa ser considerado uma v.a. contínua com f.d.p. $f(x) = e^{-x}, x > 0$. Suponha que o custo de fabricação de um item seja 2,00 reais e o preço de venda seja 5,00 reais. O fabricante garante total devolução se $X \leqslant 0{,}9$. Qual o lucro esperado por item?

22. Seja $Y$ com distribuição binomial de parâmetros $n = 10$ e $p = 0{,}4$. Determine a aproximação normal para:
(a) $P(3 < Y < 8)$, (b) $P(Y \geqslant 7)$, (c) $P(Y < 5)$.

23. De um lote de produtos manufaturados, extraímos 100 itens ao acaso; se 10% dos itens do lote são defeituosos, calcule a probabilidade de 12 itens serem defeituosos. Use também a aproximação normal.

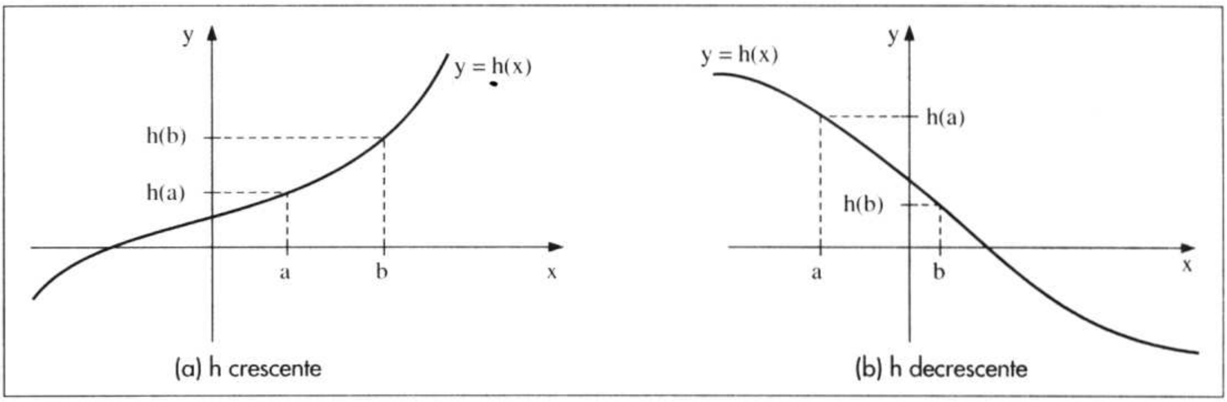
24. A confiabilidade de um mecanismo eletrônico é a probabilidade de que ele funcione sob as condições para as quais foi planejado. Uma amostra de 1.000 desses itens é escolhida ao acaso e os itens são testados, obtendo-se 30 defeituosos. Calcule a probabilidade de se obter pelo menos 30 itens defeituosos, supondo que a confiabilidade de cada item é 0,95.

## 7.6 Funções de Variáveis Contínuas

Vimos, no Capítulo 6, como obter a distribuição de uma v.a. $Y = h(X)$, se conhecermos a distribuição da v.a. discreta $X$. Vejamos, agora, o caso em que $X$ é contínua. Suponhamos, primeiramente, que a função $h$ seja estritamente monotônica, crescente ou decrescente. Neste caso, a inversa $h^{-1}$ estará univocamente determinada e podemos obter $x = h^{-1}(y)$, para valores

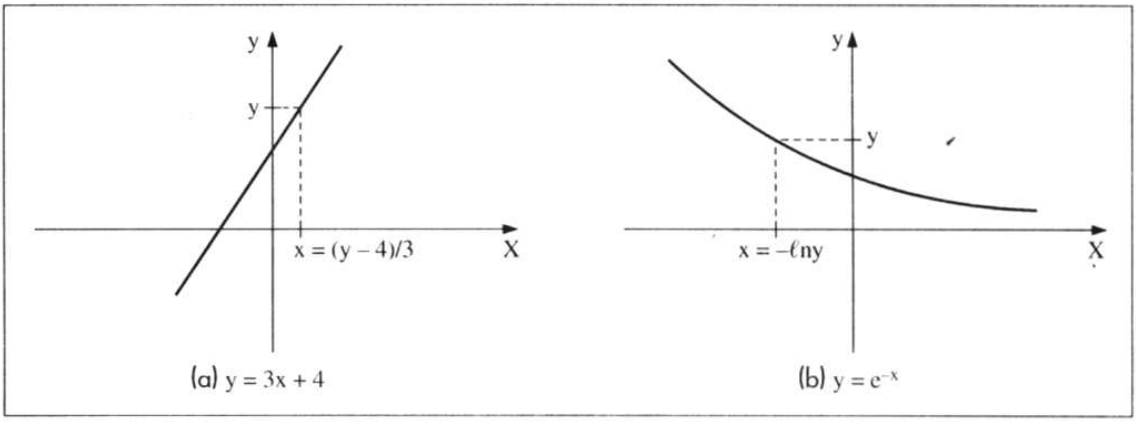
$x$ e $y$ das v.a. $X$ e $Y$, respectivamente. Observando a Figura 7.22, vemos que, se a densidade de $X$, $f(x)$, digamos, for positiva no intervalo $a < x < b$, então a densidade de $Y$ será positiva para $h(a) < y < h(b)$, se $h$ for crescente, e para $h(b) < y < h(a)$, se $h$ for decrescente.

Figura 7.22: Função de uma v.a.




Exemplo 7.11. Suponha $X$ com a densidade do Exemplo 7.2 e considere $Y = 3X + 4$. Aqui, $y = h(x) = 3x + 4$, que é crescente (Figura 7.23 (a)).

Figura 7.23: Exemplos de funções de v.a. (a) exemplo 7.11 (b) exemplo 7.12.




Denotando a densidade de $Y$ por $g(y)$, e como $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$, $g(y) > 0$ para $4 < y < 7$.

Notemos que se podem obter probabilidades relativas a $Y$ a partir da densidade de $X$. Por exemplo,

$$P(Y > 1) = P(3X + 4 > 1) = P(X > -1) = 1.$$

Vejamos como se pode obter $g(y)$. Denotemos por $G(y)$ a função de distribuição acumulada de $Y$. Da seção 7.3, sabemos que $G'(y) = g(y)$, para todo valor de $y$ para o qual $G$ for derivável. Então, temos

$$G(y) = P(Y \leqslant y) = P(3X + 4 \leqslant y) = P\left(X \leqslant \frac{y-4}{3}\right) = F\left(\frac{y-4}{3}\right),$$

onde estamos denotando por $F(\cdot)$ a função de distribuição acumulada de $X$. Usando a regra da cadeia para derivadas, temos

$$G'(y) = F'\left(\frac{y-4}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} f\left(\frac{y-4}{3}\right),$$

do que decorre

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{9}(y-4), & \text{se } 4 < y < 7 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 7.12. Suponha, agora, que $X$ tenha densidade $f(x) = 3x^2/2$, $-1 < x < 1$ e que $Y = e^{-X}$. Segue-se que $h(x) = e^{-x}$ é uma função decrescente e $x = -\ell n(y)$ (Figura 7.23 (b)). Então,

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leqslant y) = P(e^{-X} \leqslant y) = P(X \geqslant -\ell n(y)) \\ &= 1 - P(X \leqslant -\ell n(y)) = 1 - F(-\ell n(y)), \end{aligned}$$

onde novamente $F$ denota a f.d.a. de $X$. Derivando, obtemos a f.d.p. de $Y$,

$$g(y) = \frac{3}{2y} (\ell n(y))^2, \quad e^{-1} < y < e.$$

O seguinte resultado generaliza esses dois exemplos.

Teorema 7.1. Se $X$ for uma v.a. contínua, com densidade $f(x) > 0$, $a < x < b$, então $Y = h(X)$ tem densidade

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right|, \tag{7.30}$$

supondo que $h$ seja monotônica, derivável para todo $x$. Se $h$ for crescente, $g(y) > 0$, $h(a) < y < h(b)$ e, se $h$ for decrescente, $g(y) > 0$, $h(b) < y < h(a)$.

Prova. Basta notar que $G(y) = P(Y \leqslant y) = P(h(X) \leqslant y)$ e que essa probabilidade é igual a $P(X \leqslant h^{-1}(y)) = F(h^{-1}(y))$, se $h$ for crescente, e igual a $1 - F(h^{-1}(y))$, se $h$ for decrescente. Derivando $G(y)$ obtemos o resultado, notando que a derivada $(h^{-1}(y))' = dx/dy > 0$ se $h$ for crescente, e negativa se $h$ for decrescente.

Suponha, agora, que $h$ não seja monotônica. Um caso de interesse que será usado mais tarde é $Y = h(X) = X^2$ (Figura 7.24). Temos

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) \\ &= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}), \end{aligned}$$

e derivando obtemos a densidade de $Y$,

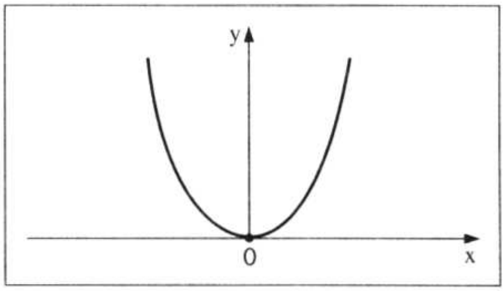
$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})], \tag{7.31}$$

onde $f$ é a densidade de $X$.

Se $f(x) = 1$, $0 < x < 1$ ($X$ é uniforme no intervalo $[0, 1]$), então

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}},\ 0 < y < 1.$$

Figura 7.24: Ilustração de $Y = h(X) = X^2$.




**Problemas**

25. Considere a v.a. $X$ do problema 2 e $Y = X + 5$.
    (a) Calcule $P(Y \leqslant 5{,}5)$.
    (b) Obtenha a densidade de $Y$.
    (c) Obtenha a densidade de $Z = 2X$.

26. Suponha que a v.a. $X$ tenha a densidade do Problema 8. Se $Y = 2X - 3/5$, obter a densidade de $Y$. Calcule $E(Y)$ e $\mathrm{Var}(Y)$.

27. Suponha $X \sim \mathcal{U}[-1, 1]$. Calcule a densidade de $Y = X^2$ e de $W = |X|$.

## 7.7 Outros Modelos Importantes

Nesta seção vamos introduzir alguns modelos para v.a. contínuas que serão bastante utilizados na terceira parte deste livro. Juntamente com o modelo normal, esses modelos são úteis para as v.a. de interesse prático, que na maioria dos casos assumem valores positivos e tendem a ter distribuições assimétricas à direita.

### 7.7.1 A Distribuição Gama

Uma extensão do modelo exponencial é estudado a seguir.

**Definição.** A v.a. contínua $X$, assumindo valores positivos, tem uma distribuição gama com parâmetros $\alpha \geqslant 1$ e $\beta > 0$, se sua f.d.p. for dada por

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\, x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{7.32}$$

Em (7.32), $\Gamma(\alpha)$ é a *função gama*, importante em muitas áreas da Matemática, dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \ \alpha > 0. \qquad (7.33)$$

Não é difícil ver que $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\,\Gamma(\alpha - 1)$, se $\alpha = n$ for um inteiro positivo, $\Gamma(n) = (n-1)!$ e que $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Veja o problema 45.

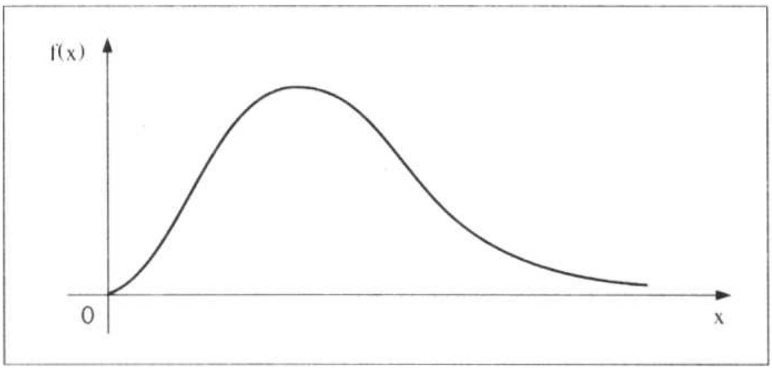
A Figura 7.25 ilustra a densidade (7.32) para $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Se $\alpha = 1$ obtemos a distribuição exponencial (7.26). Muitos casos de interesse têm $\alpha$ inteiro positivo.

Usaremos a notação

$$X \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$$

para designar uma v.a. com a distribuição dada por (7.32).

Figura 7.25: Gráfico da f.d.p. de uma distribuição gama, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.




Pode-se demonstrar que:

$$E(X) = \alpha\beta, \ \text{Var}(X) = \alpha\beta^2. \qquad (7.34)$$

## 7.7.2 A Distribuição Qui-Quadrado

Um caso especial importante do modelo gama é obtido fazendo-se $\alpha = \nu/2$ e $\beta = 2$, com $\nu > 0$ inteiro.

Definição. Uma v.a. contínua $Y$, com valores positivos, tem uma distribuição qui-quadrado com $\nu$ graus de liberdade (denotada $\chi^2(\nu)$), se sua densidade for dada por

$$f(y;\nu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\nu/2)2^{\nu/2}} y^{\nu/2-1} e^{-y/2}, & y > 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases} \qquad (7.35)$$

A Figura 7.26 ilustra os gráficos de (7.35) para $\nu = 1, 2, 3$. Segue-se de (7.34) que

$$E(Y) = \nu, \quad \text{Var}(Y) = 2\nu. \qquad (7.36)$$

A distribuição qui-quadrado tem muitas aplicações em Estatística e, como no caso da normal, existem tabelas para obter probabilidades. A Tabela IV, fornece os valores de $y_0$ tais que $P(Y > y_0) = p$, para alguns valores de $p$ e de $v$. Ver Figura 7.27.

Figura 7.26: Gráficos da distribuição qui-quadrado $\chi^2(v)$.

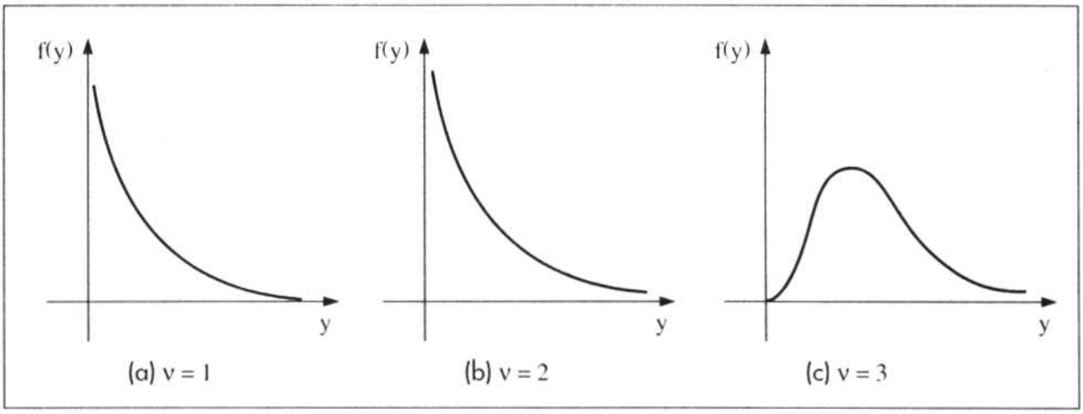
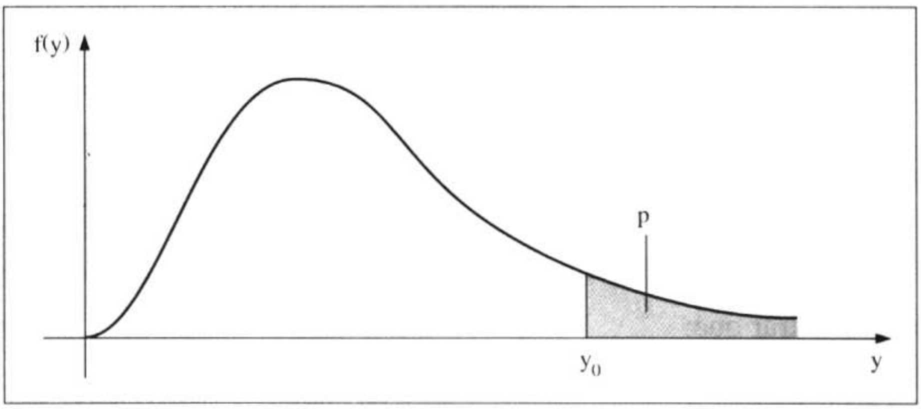



Figura 7.27: Valores tabelados da distribuição $\chi^2(v)$.




Exemplo 7.13. Usando a Tabela IV, para $v = 10$, observe que $P(Y > 2{,}558) = 0{,}99$, ao passo que $P(Y > 18{;}307) = 0{,}05$.

Para $v > 30$ podemos usar uma aproximação normal à distribuição qui-quadrado. Especificamente, temos o seguinte resultado: se $Y$ tiver distribuição qui-quadrado com $v$ graus de liberdade, então a v.a.

$$Z = \sqrt{2Y} - \sqrt{2v - 1} \sim N(0,1).$$

Por exemplo, consultando a Tabela IV, temos que, se $v = 30$,

$$P(Y > 40{,}256) = 0{,}10,$$

enquanto que, usando a fórmula acima, temos que

$$z = \sqrt{2 \times 40{,}256} - \sqrt{59} = 1{,}292$$

e $P(Z > 1{,}292) = 0{,}099$, que resulta ser uma boa aproximação.

Exemplo 7.14. Considere $Z \sim N(0,1)$ e considere a v.a. $Y = Z^2$. De (7.31) temos que a densidade de $Y$ é dada por

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [\phi(\sqrt{y}) + \phi(-\sqrt{y})],$$

onde por $\phi(z)$ indicamos a densidade da $N(0,1)$. Resulta

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2},$$

e comparando com (7.35) vemos que $Y \sim \chi^2(1)$. Temos, aqui, um resultado importante: *o quadrado de uma v.a. com distribuição normal padrão é uma v.a. com distribuição* $\chi^2(1)$. De um modo mais geral, uma v.a. $x^2(\nu)$ *pode ser vista como a soma de* $\nu$ *normais padrões ao quadrado, independentes.*

### 7.7.3 A Distribuição *t* de Student

A distribuição $t$ de Student é importante no que se refere a inferências sobre médias populacionais, tópico a ser tratado nos Capítulos 12 e 13. A obtenção da densidade está contida no teorema abaixo.

Teorema 7.1. Seja $Z$ uma v.a. $N(0,1)$ e $Y$ uma v.a. $\chi^2(1)$, com $Z$ e $Y$ independentes. Então, a v.a.

$$t = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}, \tag{7.37}$$

tem densidade dada por

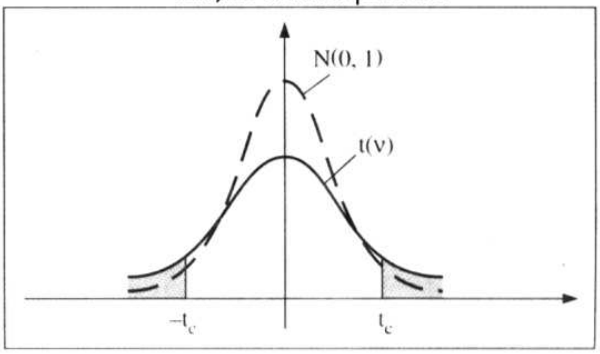
$$f(t;\, \nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}} (1 + t^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}, \; -\infty < t < \infty. \tag{7.38}$$

Diremos que tal variável tem uma *distribuição t de Student com* $\nu$ *graus de liberdade* e a indicaremos por $t(\nu)$. Pode-se provar que

$$E(t) = 0, \quad \text{Var}(t) = \frac{\nu}{\nu - 2}, \tag{7.39}$$

e verificar que o gráfico da densidade de $t$ aproxima-se bastante de uma $N(0,1)$ quando $\nu$ é grande. Veja a Figura 7.28.

Figura 7.28: A distribuição $t$ de Student e a distribuição normal padrão.



Como essa distribuição é bastante utilizada na prática, existem tabelas fornecendo probabilidades relativas a ela. A Tabela V fornece os valores de $t_c$ tais que

$$P(-t_c < t(\nu) < t_c) = 1 - p, \tag{7.40}$$

para alguns valores de $p$ e de $\nu$.

O nome *Student* vem do pseudônimo usado pelo estatístico inglês W. S. Gosset, que introduziu essa distribuição no início do século passado.

Exemplo 7.15. Se $\nu = 6$, então, usando a Tabela V, $P(-1{,}943 < t(6) < 1{,}943) = 0{,}90$, ao passo que $P(t(6) > 2{,}447) = 0{,}025$. Observe que, nessa tabela, há uma linha com $\nu = \infty$, que corresponde a usar os valores da $N(0,1)$. Para $n > 120$ essa aproximação é muito boa.

## 7.7.4 A Distribuição *F* de Snedecor

Vamos considerar agora uma v.a. definida como o quociente de duas variáveis com distribuição qui-quadrado.

O seguinte teorema, que não será demonstrado, resume o que nos vai ser útil.

Teorema 7.2. Sejam $U$ e $V$ duas v.a. independentes, cada uma com distribuição qui-quadrado, com $\nu_1$ e $\nu_2$ graus de liberdade, respectivamente. Então, a v.a.

$$W = \frac{U/\nu_1}{V/\nu_2} \tag{7.41}$$

tem densidade dada por

$$g(w;\ \nu_1, \nu_2) = \frac{\Gamma((\nu_1+\nu_2)/2)}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \frac{w^{(\nu_1-2)/2}}{(1+\nu_1 w/\nu_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}},\ w > 0. \tag{7.42}$$

Diremos que $W$ tem *distribuição F de Snedecor, com* $\nu_1$ *e* $\nu_2$ *graus de liberdade*, e usaremos a notação $W \sim F(\nu_1, \nu_2)$. Pode-se mostrar que

$$E(W) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(W) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}. \tag{7.43}$$

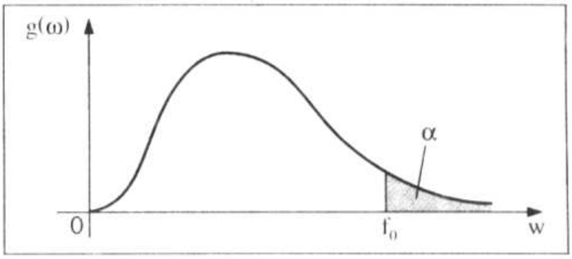
O gráfico típico de uma v.a. com distribuição $F$ está na Figura 7.29. Na Tabela VI são dados os pontos $f_0$ tais que

$$P\{F(\nu_1, \nu_2) > f_0\} = \alpha,$$

para $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}025$ e alguns valores de $\nu_1$ e $\nu_2$. Para encontrar os valores inferiores, usa-se a identidade

$$F(\nu_1, \nu_2) = 1/F(\nu_2, \nu_1). \tag{7.44}$$

Figura 7.29: Gráfico de distribuição $F$.




**Exemplo 7.16.** Considere, por exemplo, $W \sim F(5, 7)$. Consultando a Tabela VI, $P(F > 3{,}97) = 0{,}05$ ou, então, $P(F \leqslant 3{,}97) = 0{,}95$. Digamos, agora, que desejamos encontrar o valor $f_0$ tal que $P(F < f_0) = 0{,}05$. Da igualdade (7.44) temos

$$0{,}05 = P\{F(5{,}7) < f_0\} = P\{1/F(7{,}5) < f_0\} = P\{F(7{,}5) > 1/f_0\},$$

e procurando na Tabela VI, para $F(7{,}5)$, obtemos $1/f_0 = 4{,}88$ e, portanto, $f_0 = 0{,}205$.

Na seção de Problemas e Complementos apresentamos algumas outras distribuições de interesse, como a log-normal, Pareto, Weibull e beta.

Na Tabela 7.2 mostramos os principais modelos para v.a. contínuas, incluindo: a densidade, o domínio dos valores, os parâmetros, a média e a variância.

**Tabela 7.2:** Modelos para variáveis contínuas.

| Modelo | $f(x)$ | Parâmetros | $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ |
|---|---|---|---|
| Uniforme | $1/(\beta-\alpha),\ \alpha < x < \beta$ | $\alpha, \beta$ | $(\alpha+\beta)/2,\ (\beta-\alpha)^2/12$ |
| Exponencial | $1/\beta\ e^{-t/\beta}, t > 0$ | $\beta$ | $\beta, \beta^2$ |
| Normal | $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, -\infty < x < \infty$ | $\mu, \sigma$ | $\mu, \sigma^2$ |
| Gama | $\beta^{-\alpha}/\Gamma(\alpha)\ x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, x > 0$ | $\beta > 0, \alpha \geqslant 1$ | $\alpha\beta, \alpha\beta^2$ |
| Qui-quadrado | $\frac{2^{-\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} y^{\nu/2-1} e^{-y/2}, y > 0$ | $\nu$ | $\nu, 2\nu$ |
| t-Student | $\frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, -\infty < t < \infty$ | $\nu$ | $0, \nu/(\nu-2)$ |
| F-Snedecor | $\frac{\Gamma\left(\frac{(\nu_1+\nu_2)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \frac{w^{\frac{\nu_1-2}{2}}}{\left(1+\frac{\nu_1 w}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}, w > 0.$ | $\nu_1, \nu_2$ | $\frac{\nu_2}{\nu_2-2}, \frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}$ |

## 7.8 Quantis

No Capítulo 6 definimos o $p$-quantil $Q(p)$ como o valor da v.a. discreta $X$ satisfazendo as duas desigualdades de (6.26).

No caso de uma v.a. contínua $X$, essa definição torna-se mais simples. Se $F(x)$ designar a f.d.a. de $X$, temos que as desigualdades em (6.26) ficam:

$$P(X \leqslant Q(p)) = F(Q(p)) \geqslant p \tag{7.45}$$

e

$$P(X \geqslant Q(p)) = 1 - P(X < Q(p)) = 1 - P(X \leqslant Q(p)) = 1 - F(Q(p)) \geqslant 1 - p. \tag{7.46}$$

Mas (7.46) pode ser reescrita como

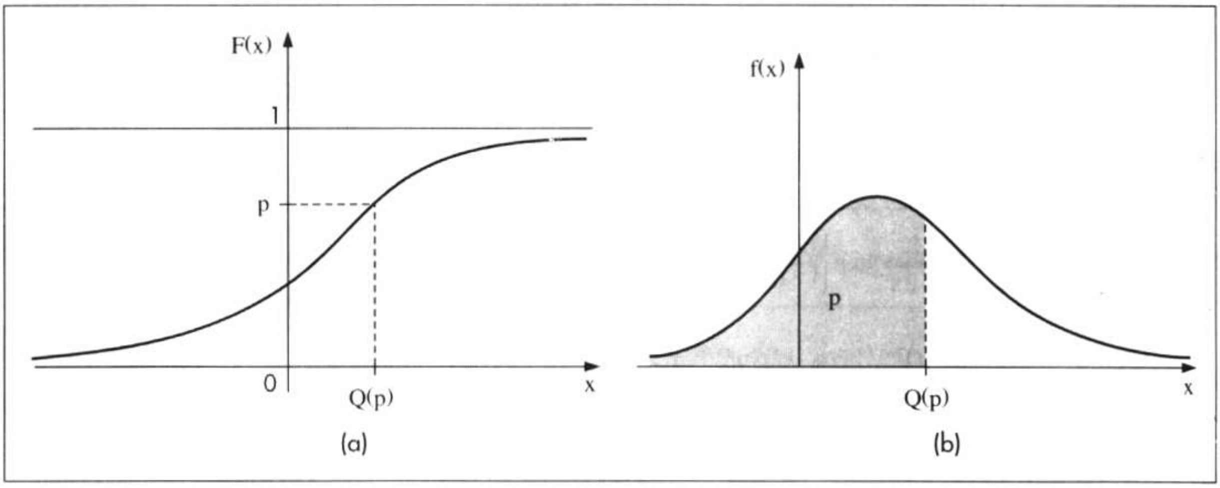
$$F(Q(p)) \leqslant p. \tag{7.47}$$

Portanto, de (7.45) e (7.47) chegamos à conclusão de que o $p$-quantil deve satisfazer

$$F(Q(p)) = p. \tag{7.48}$$

Graficamente, temos a situação ilustrada na Figura (7.30). Ou seja, para obter $Q(p)$, marcamos $p$ no eixo das ordenadas, consideramos a reta horizontal pelo ponto $(0, p)$ até encontrar a curva de $F(x)$ e baixamos uma reta vertical até encontrar $Q(p)$ no eixo das abscissas. Analiticamente, temos de resolver a equação (7.48). Vejamos alguns exemplos.

Figura 7.30: Definição de Q(p) (a) f.d.a. (b) f.d.p.




Exemplo 7.17. Se $Z \sim N(0, 1)$, utilizando a Tabela III encontramos facilmente que

$Q(0, 5) = Q_2 = 0,$

$Q(0, 25) = Q_1 = -0,675,$

$Q(0, 30) = -0,52,$

$Q(0,75) = Q_3 = 0,675.$

Exemplo 7.18. Suponha que $Y \sim \text{Exp}(2)$. Se quisermos calcular a mediana, $Q_2$, teremos de resolver

$$\int_0^{Q_2} f(y)dy = 0,5,$$

ou seja,

$$1/2 \int_0^{Q_2} e^{-y/2}\, dy = 0,5.$$

Obtemos

$$1 - e^{-Q_2/2} = 0,5,$$

do que temos, finalmente, $Q_2 = -2\ell n(0,5) = 1,386$.

## 7.9 Exemplos Computacionais

Nesta seção final, vamos dar alguns exemplos de como obter probabilidades acumuladas para a normal e exponencial, usando o pacote Minitab. Isso também pode ser feito com outros pacotes ou planilhas, bem como considerar outras distribuições contínuas.

Considere a v.a. contínua $X$, com f.d.a. $F(x) = P(X \leqslant x)$. O problema é, dado $x$, calcular $F(x)$, ou dado $F(x)$, calcular $x$.

Exemplo 7.19. Suponha $X \sim N(10, 25)$. Para obter $F(x)$, para $x = 8,65$, usamos os comandos CDF e NORMAL do Minitab. Por outro lado, se $F(x) = 0,8269$, então obteremos $x$ usando os comandos INVCDF e NORMAL. Veja o Quadro 7.1.

Quadro 7.1 Obtenção de $x$ e $F(x)$ para a Normal. Minitab.

| | |
|---|---|
| MTB > CDF 8.65; | MTB > INVCDF 0.8269; |
| SUBC > NORMAL 10,25. | SUBC > NORMAL 10,25. |
| **Cumulative Distribution Function** | **Inverse Cumulative Distribution Function** |
| Normal with mean = 10.0000 and standard deviation = 25.0000 | Normal with mean = 10.0000 and standard deviation = 25.0000 |
| x P(X < = x) | P(X < = x) x |
| 8.6500 0.4785 | 0.8269 33.5496 |

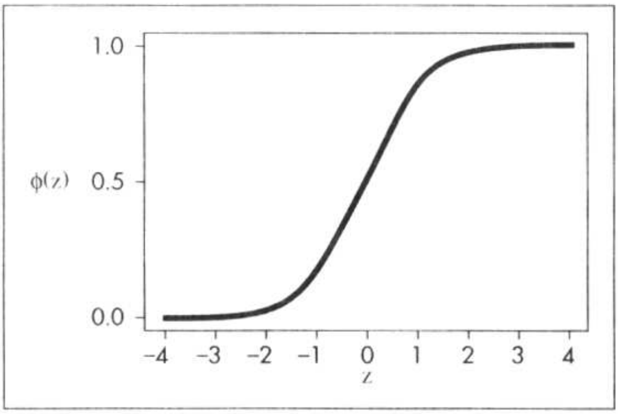
Exemplo 7.20. O Quadro 7.2 mostra cálculos similares para distribuição exponencial, com média 0,5, ou seja, parâmetro $\beta = 2$.

Quadro 7.2 Obtenção de $x$ e $F(x)$ para a Exponencial. Minitab.

| | |
|---|---|
| MTB > CDF 0.85; | MTB > INVCDF 0.345; |
| SUBC> EXPONENCIAL 0.5. | SUBC> EXPONENCIAL 0.5. |
| **Cumulative Distribution Function** | **Inverse Cumulative Distribution Function** |
| Exponential with mean = 0.500000 | Exponential with mean = 0.500000 |
| x P(X < = x) | P(X < = x) x |
| 0.8500 0.8173 | 0.3450 0.2116 |

Exemplo 7.21. Podemos, também, construir o gráfico de uma f.d.a, por meio de comandos do Minitab. Suponha que $Z \sim N(0,1)$. Como os valores de $Z$ estão concentrados no intervalo $[-4, 4]$, podemos considerar um vetor de valores $z = [-4, 0, -3, 9, -3, 8, ..., 3, 8, 3, 9, 4, 0]$ e obter os valores da f.d.a. com o comando CDF. Depois, pedir para plotar os pares $(z_i, F(z_i))$. O gráfico está na Figura 7.31.

Figura 7.31: Gráfico da f.d.a. da $N(0, 1)$. Minitab.




## 7.10 Problemas e Complementos

28. Numa determinada localidade, a distribuição de renda (em reais) é uma v.a. $X$ com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & 2 < x \leqslant 6 \\ 0, & x < 0 \text{ ou } x > 6. \end{cases}$$

(a) Qual a renda média nessa localidade?

(b) Escolhida uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade de sua renda ser superior a \$3.000,00?

(c) Qual a mediana da variável?

29. Se $X$ tiver distribuição uniforme com parâmetros $\alpha$ e $\beta$, mostre que:

(a) $E(X) = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$.

(b) $\text{Var}(X) = (\beta - \alpha)^2/12$.

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ 1, & x > \beta. \end{cases}$

30. Complete a tabela abaixo, que corresponde a alguns valores da função

$$G(u) = P(0 \leq U \leq u),$$

definida na seção 7.4.1, com $U$ uma v.a. uniforme no intervalo $(-1/2, 1/2)$.

Probabilidades $p$, tais que $p = P(0 \leq U \leq u)$

| Primeira decimal de $u$ | Segunda decimal de $u$ | | | | Primeira decimal de $u$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | ... | 9 | |
| 0,0 | | | | | 0,0 |
| 0,1 | | | | | 0,1 |
| 0,2 | | | | | 0,2 |
| 0,3 | | | | | 0,3 |
| 0,4 | | | | | 0,4 |
| 0,5 | | | | | 0,5 |

31. Dada a v.a. $X$, uniforme em $(5, 10)$, calcule as probabilidades abaixo, usando a tabela do problema anterior.

(a) $P(X < 7)$

(b) $P(8 < X < 9)$

(c) $P(X > 8{,}5)$

(d) $P(|X - 7{,}5| > 2)$

32. Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, calcular $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

33. As notas de Estatística Econômica dos alunos de determinada universidade distribuem-se de acordo com uma distribuição normal, com média 6,4 e desvio padrão 0,8. O professor atribui graus A, B e C da seguinte forma:

| Nota | Grau |
|---|---|
| $x < 5$ | C |
| $5 \leq x < 7{,}5$ | B |
| $7{,}5 \leq x \leq 10$ | A |

Numa classe de 80 alunos, qual o número esperado de alunos com grau A? E com grau B? E C?

34. O peso bruto de latas de conserva é uma v.a. normal, com média 1.000 g e desvio padrão 20 g.

(a) Qual a probabilidade de uma lata pesar menos de 980 g?

(b) Qual a probabilidade de uma lata pesar mais de 1.010 g?

35. A distribuição dos pesos de coelhos criados numa granja pode muito bem ser representada por uma distribuição normal, com média de 5 kg e desvio padrão de 0,8 kg. Um abatedouro comprará 5.000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso, do seguinte modo: 20% dos leves como pequenos, os 55% seguintes como médios, os 15% seguintes como grandes e os 10% mais pesados como extras. Quais os limites de peso para cada classe?

36. Uma enchedora automática de garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de $1.000\ cm^3$ e o desvio padrão de $10\ cm^3$. Pode-se admitir que a variável volume seja normal.
   *(a)* Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que $990\ cm^3$?
   *(b)* Qual é a porcentagem das garrafas em que o volume líquido não se desvia da média em mais que dois desvios padrões?
   *(c)* O que acontecerá com a porcentagem do item *(b)* se a máquina for regulada de forma que a média seja $1.200\ cm^3$ e o desvio padrão $20\ cm^3$?

37. O diâmetro de certo tipo de anel industrial é uma v.a. com distribuição normal, de média 0,10 cm e desvio padrão 0,02 cm. Se o diâmetro de um anel diferir da média em mais que 0,03 cm, ele é vendido por \$5,00; caso contrário, é vendido por \$10,00. Qual o preço médio de venda de cada anel?

38. Uma empresa produz televisores e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar algum defeito grave no prazo de seis meses. Ela produz televisores do tipo A (comum) e do tipo B (luxo), com lucros respectivos de \$1.000,00 e \$2.000,00, caso não haja restituição, e com prejuízos de \$3.000,00 e \$8.000,00, se houver restituição. Suponha que o tempo para a ocorrência de algum defeito grave seja, em ambos os casos, uma v.a. com distribuição normal, respectivamente, com médias 9 meses e 12 meses, e variâncias 4 meses$^2$ e 9 meses$^2$. Se tivesse de planejar uma estratégia de *marketing* para a empresa, você incentivaria as vendas dos aparelhos do tipo A ou do tipo B?

39. Determine as médias das v.a. $X$, $Y$ e $Z$:
   *(a)* $X$ uniforme em $(1, 3)$, $Y = 3X + 4$, $Z = e^X$.
   *(b)* $X$ tem f.d.p. $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$, $Y = X^2$, $Z = 3/(X + 1)^2$.

40. Suponha que $X$ tenha distribuição uniforme em $[-a, 3a]$. Determine a média e a variância de $X$.

41. Se $T$ tiver distribuição exponencial com parâmetro $\beta$, mostre que:
   *(a)* $E(T) = \beta$.   *(b)* $\text{Var}(T) = \beta^2$.

42. Os dados a seguir representam uma amostra de firmas de determinado ramo de atividade de uma região. Foram observadas duas variáveis: faturamento e número de empregados.

| Nº de empregados | Nº de empresas |
|---|---|
| 0 ⊢ 20 | 35 |
| 20 ⊢ 50 | 75 |
| 50 ⊢ 100 | 45 |
| 100 ⊢ 200 | 30 |
| 200 ⊢ 400 | 15 |
| 400 ⊢ 800 | 8 |
| > 800 | 2 |
| Total | 210 |

| Faturamento | Nº de empresas |
|---|---|
| 0 ⊢ 10 | 18 |
| 10 ⊢ 50 | 52 |
| 50 ⊢ 100 | 30 |
| 100 ⊢ 200 | 26 |
| 200 ⊢ 400 | 24 |
| 400 ⊢ 800 | 20 |
| 800 ⊢ 1600 | 16 |
| 1600 ⊢ 3200 | 14 |
| 3200 ⊢ 6400 | 6 |
| > 6400 | 4 |
| Total | 210 |