

LISTA 2-CE085-Estatística Inferencial (Bolfarine e Sandoval)

—

2.6 Exercícios

2.1. Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(0, \sigma^2)$.

- (i) Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de σ^2 .
- (ii) Encontre uma estatística suficiente para σ^2 .
- (iii) Obtenha a partir desta estatística um estimador não viciado para σ^2 .
- (iv) Verifique se este estimador é eficiente.

2.2. Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim Binomial(2, \theta)$.

- (i) Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de θ .
- (ii) Encontre uma estatística suficiente para θ .
- (iii) Obtenha um estimador não viciado para θ que seja função da estatística suficiente.
- (iv) Verifique se o estimador é eficiente.

2.3. Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória X com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0.$$

- (i) Mostre que a f.d.p. pertence à família exponencial.
- (ii) Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de θ .
- (iii) Encontre uma estatística suficiente para θ e sua distribuição.
- (iv) Sugira um estimador não viciado para θ que seja função da estatística suficiente e verifique se é eficiente.

2.4. Sejam X_1, X_2 uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim Poisson(\theta)$. Mostre que $T = X_1 + 2X_2$ não é suficiente para θ .

2.5. Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com função de densidade (ou de probabilidade) $f(x|\theta)$ para a qual as condições de regularidade estão satisfeitas. Seja $\hat{\gamma}$ um estimador não viciado para $g(\theta)$. Mostre que

$$\text{Var}(\hat{\gamma}) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{nE \left[\left(\frac{\partial \log f(X|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]}.$$

2.6. Seja $f(x|\theta)$ uma função densidade para a qual as condições de regularidade estão satisfeitas. Mostre que

$$E \left[\left(\frac{\partial \log f(X|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -E \left[\frac{\partial^2 \log f(X|\theta)}{\partial \theta^2} \right].$$

2.7. Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com f.d.p. dada por

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad x > \theta, \quad \theta > 0.$$

- (i) Encontre uma estatística suficiente para θ .
- (ii) Baseado nesta estatística, obtenha um estimador não viciado para θ .

2.8. Mostre que se S é um estimador não viciado de θ , então $\hat{\theta}$ dado por (2.5.1) também é não viciado para θ .

2.9. Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu, 1)$.

- (i) Mostre que o estimador $\hat{\gamma} = \bar{X}^2 - 1/n$ é não viciado para $g(\mu) = \mu^2$.
- (ii) Existe ENVVUM para μ^2 ?
- (iii) Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de $g(\mu) = \mu^2$ e verifique se $\hat{\gamma}$ é eficiente.

2.10. Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$. Obtenha o ENVVUM para $\theta(1 - \theta)$.

Sugestão: verifique se $S^2 = \frac{n}{(n-1)}\bar{X}(1 - \bar{X})$ é não viciado para $\theta(1 - \theta)$.

2.11. Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com distribuição geométrica com parâmetro θ , isto é,

$$f(x|\theta) = \theta(1 - \theta)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < \theta < 1.$$

Encontre o ENVVUM para $1/\theta$.

2.12. Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes onde $Y_i \sim N(\beta x_i, \sigma^2)$, onde x_i é conhecido, $i = 1, \dots, n$. Note que, neste caso, as variáveis Y_i não são identicamente distribuídas.

- (i) Encontre uma estatística conjuntamente suficiente para β e σ^2 .
- (ii) Baseado nessa estatística, obtenha os ENVVUM para β e para σ^2 .