3.7 Estimadores Consistentes

Os métodos de estimação considerados nesta seção produzem, em geral, estimadores consistentes, ou seja, à medida que o tamanho da amostra aumenta, os estimadores ficam tão próximos do parâmetro que está sendo estimado quanto desejado. Consistência está ligada ao conceito de convergência em probabilidade (veja James, 1981).

Definição 3.7.1. *Sejam* $X_1, \ldots, X_n$ *uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória* X *que depende do parâmetro* θ*. Dizemos que o estimador* $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ *é consistente para o parâmetro* θ*, se,*

$$lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon) = 0.$$

Em geral, usamos a desigualdade de Chebyshev (veja James,1981) para a verificação dessa propriedade.

Exemplo 3.7.1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição da variável aleatória X com média θ e variância σ^2. Temos, usando a desigualdade de Chebyshev, que

$$P(|\overline{X} - \theta| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2},$$

de modo que

$$lim_{n\to\infty} P(|\overline{X} - \theta| > \epsilon) = 0,$$

e portanto $\overline{X}$ é consistente para θ.

3.8 Exercícios

3.1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com função de densidade de probabilidade

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^2}, \; x \geq \theta, \quad \theta > 0.$$

Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ e de $E_\theta[1/X]$.

3.2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \theta > 0.$$

(i) Encontre os estimadores de máxima verossimilhança de θ e de $g(\theta) = \theta/(1+\theta)$. (ii) Encontre a distribuição aproximada dos estimadores em (i) quando n é grande.

3.3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu, 1)$. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $g(\mu) = P_\mu[X > 0]$ e sua distribuição aproximada quando n é grande.

3.4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = \frac{x}{\theta^2}\mathrm{e}^{-x/\theta}, \quad x \geq 0, \theta > 0.$$

(i) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ e verifique se ele é eficiente.
(ii) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $Var[X]$ e encontre sua distribuição aproximada em grandes amostras.

3.5. Encontre a distribuição aproximada para grandes amostras do estimador de máxima verossimilhança de $\Phi(-\theta)$, considerado no Exemplo 3.2.2.

3.6. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ^2 no Exercício 2.9 e compare seu erro quadrático médio com o do estimador eficiente $\hat{\gamma}$ dado no Exercício 2.9, (i).

3.7. Considere uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição da variável aleatória X onde cada observação apresenta um de três resultados possíveis (por exemplo, favorável, contra e indiferente), que denotamos por "0", "1" e "2". Suponhamos que a probabilidade de "0" é $p_1 = (1-\theta)/2$, a probabilidade da ocorrência do resultado "1" é $p_2 = 1/2$ e do resultado "2" é $p_3 = \theta/2$. Seja n_1: o número de vezes que "0" ocorre, n_2: o número de vezes que "1" ocorre e n_3: o número de vezes que o "2" ocorre.
(i) Encontre, como função de n_1, n_2, n_3, uma estatística suficiente para θ.
(ii) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ.

3.8. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = \theta(\theta+1)x^{\theta-1}(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1, \theta > 0.$$

(i) Encontre, usando o método dos momentos, um estimador para θ.
(ii) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ e sua distribuição aproximada em grandes amostras.

3.9. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável X com função de densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}}, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < \alpha < \infty, \beta > 0.$$

(i) Encontre a distribuição de $Y = \mathrm{e}^X$.
(ii) Discuta a obtenção do estimador de máxima verossimilhança para β, quando $\alpha = 0$.
(iii) Encontre estatísticas conjuntamente suficientes para α e β.
(iv) Discuta a obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança para α e β e verifique se são funções das estatísticas obtidas em (iii).
(v) Usando (i), gere uma amostra aleatória de tamanho n =20 da variável aleatória Y. A partir desta amostra, obtenha uma amostra de tamanho n=20 para a variável aleatória X e usando um programa de computador, obtenha os estimadores de máxima verossimilhança de α e β.

3.10. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de densidade de probabilidade

$$f(x|\theta) = \frac{(x+1)}{\theta(\theta+1)}\mathrm{e}^{-x/\theta}, \quad x > 0, \theta > 0.$$

(i) Encontre o estimador de máxima verossimilhança para θ e sua distribuição em grandes amostras.
(ii) Obtenha um estimador para θ usando o método dos momentos.

3.11. Refaça o Exercício 3.7 supondo agora que $p_1 = \theta^2$, $p_2 = 2\theta(1-\theta)$ e $p_3 = (1-\theta)^2$.

3.12. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição $N(0, \sigma^2)$. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de σ e sua distribuição em grandes amostras.

3.13. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com distribuição exponencial com parâmetro θ. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta) = P[X > 1]$ e sua distribuição aproximada quando n for grande.

3.14. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com função de densidade de probabilidade Weibull dada por

$$f(x|\theta, a) = \theta a x^{a-1} e^{-\theta x^a}; \; x, a, \theta > 0.$$

(i) Suponha que a seja conhecido. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ e sua distribuição aproximada para quando n for grande.
(ii) Suponha agora que θ e a são desconhecidos. Encontre as equações de verossimilhança para os dois parâmetros. Proponha um procedimento iterativo para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança dos dois parâmetros. Discuta a implementação do procedimento no computador.
(iii) Gere uma amostra com $n = 10$ elementos da distribuição de X assumindo que $a = \theta = 1$. Usando o procedimento iterativo em (ii), obtenha estimadores

de máxima verossimilhança de a e de θ. Compare as estimativas com os valores usados para simular a amostra.

3.15. Obtenha a informação de Fisher $I_F(\theta)$ no Exemplo 3.1.6.

3.16. Obtenha os estimadores de máxima verossimilhança de β e σ^2 no modelo de regressão dado no Exercício 2.12.

3.17. Verifique se os estimadores obtidos nos Exemplos 3.1.2, 3.1.3, 3.2.1, 3.2.3 e 3.6.2 são consistentes.

3.18. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes com $Y_i \sim N(\alpha + \beta x_i, \sigma^2)$, onde x_i é conhecido, $i = 1, \ldots, n$. Encontre os estimadores de máxima verossimilhança de α, β e σ^2.

3.19. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes com $Y_i \sim N(\beta x_i, \sigma^2 x_i)$, onde $x_i > 0$ é conhecido, $i = 1, \ldots, n$. Encontre os estimadores de máxima verossimilhança de β e σ^2.

3.20. No caso do modelo do Exercício 3.18, os estimadores de α e β obtidos através do método de mínimos quadrados minimizam a soma de quadrados $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \alpha - \beta x_i)^2$. Verifique que os estimadores de mínimos quadrados coincidem com os estimadores de máxima verossimilhança de α e β.

3.21. Defina o critério correspondente para obter os estimadores de mínimos quadrados para o modelo do Exercício 3.19.