$$\int_{max(a,X_{(n)})}^{t_1} \frac{(n+b)max(a,X_{(n)})^{n+b}}{\theta^{n+b+1}} d\theta = \frac{\alpha}{2}$$

e

$$\int_{t_2}^{\infty} \frac{(n+b)max(a,X_{(n)})^{n+b}}{\theta^{n+b+1}} d\theta = \frac{\alpha}{2},$$

o que leva a

$$t_1 = \frac{max(a,X_{(n)})}{(1-\alpha/2)^{1/n+b}} \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{max(a,X_{(n)})}{(\alpha/2)^{1/n+b}},$$

de modo que o intervalo Bayesiano simétrico para θ, com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$, é dado por

$$\left[\frac{max(a,X_{(n)})}{(1-\alpha/2)^{1/n+b}}; \frac{max(a,X_{(n)})}{\alpha/2^{1/n+b}} \right]. \tag{5.5.3}$$

Desde que a densidade a posteriori (5.5.2) não é simétrica, temos que o intervalo (5.5.3) não é o HPD que nesse caso deve ser obtido numericamente.

5.6 Exercícios

5.1. Verifique a validade da expressão (5.1.1).

5.2. Considere o Exemplo 5.2.1. Mostre que a distribuição da quantidade pivotal

$$Q(\mathbf{X},\theta) = 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i$$

é quiquadrado com $2n$ graus de liberdade com densidade dada por (5.2.4).

5.3. Considere o Exemplo 5.2.2. Mostre que a distibuição de $Q(\mathbf{X},\theta) = X_{(n)}/\theta$ é dada por (5.2.9). Considere o intervalo

$$\left[X_{(n)}; \frac{X_{(n)}}{\alpha^{1/n}} \right]. \tag{5.6.1}$$

Encontre seu coeficiente de confiança, compare seu comprimento com o do intervalo obtido no Exemplo 5.2.2, e mostre que o intervalo (5.6.1) é o de menor comprimento dentre todos os intervalos com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$.

5.4. Seja X uma única observação da densidade

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1} \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0.$$

(i) Mostre que $-\theta \log X$ é uma quantidade pivotal e use-a para construir um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$.
(ii) Seja $Y = (-\log X)^{-1}$. Encontre o coeficiente de confiança associado ao intervalo $(Y/2, Y)$.

5.5. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\theta, \theta)$. Sugira uma quantidade pivotal para construir um intervalo de confiança para θ com $\gamma = 1 - \alpha$.

5.6. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com função de densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = I_{(\theta-1/2,\theta+1/2)}(x).$$

Seja $[X_{(1)}; X_{(n)}]$ um intervalo de confiança para θ. Calcule seu coeficiente de confiança. Mostre que o resultado vale para qualquer distribuição simétrica em torno de θ.

5.7. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = \theta \mathrm{e}^{-\theta x}; \quad x > 0, \quad \theta > 0.$$

Encontre intervalos de confiança para $E(X)$ e $Var(X)$ com coeficientes de confiança $\gamma = 1 - \alpha$.

5.8. Sejam X_1, X_2 uma amostra aleatória de tamanho 2 da distribuição $N(\mu, 1)$. Seja $Y_1 < Y_2$ a amostra ordenada correspondente.
(i) Encontre o coeficiente de confiança associado ao intervalo (Y_1, Y_2).
(ii) Considere o intervalo de confiança para μ baseado na quantidade pivotal $\overline{X} - \mu$, onde $\overline{X} = (X_1 + X_2)/2$. Compare o comprimento esperado deste intervalo com o comprimento esperado do intervalo em (i) usando o mesmo γ.

5.9. Sejam $X_1, \ldots, X_{n+1}$, uma amostra aleatória de tamanho $n+1$ $(n > 1)$ da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, onde μ e σ^2 são desconhecidos.
(i) Encontre c tal que

$$\frac{c(\overline{X} - X_{n+1})}{S} \sim t_{n-1},$$

onde

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{e} \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2.$$

(ii) Se $n = 8$, encontre k de modo que

$$P[\overline{X} - kS \leq X_9 \leq \overline{X} + kS] = 0,80.$$

5.10. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim Exp(\theta_1)$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória da variável aleatória $Y \sim Exp(\theta_2)$. Assumindo que as duas amostras são independentes,
(i) obtenha uma quantidade pivotal para construir um intervalo de confiança para θ_1/θ_2.
(ii) Suponha que $\theta_1 = 1,5$ e $\theta_2 = 2,0$. Simule uma amostra aleatória com $n = 10$ da variável Xe com $m = 15$ da variável aleatória Y. Como fica o seu intervalo obtido a partir da quantidade pivotal encontrada em (i)?

5.11. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição $Poisson(\theta)$, com priori

$$\pi(\theta) = \mathrm{e}^{-\theta}, \quad \theta > 0.$$

Construa um intervalo de confiança Bayesiano simétrico para θ com $\gamma = 0,95$. Se $n = 10$ e $\sum_{i=1}^{n} X_i = 18$, como fica o intervalo?

5.12. Considere o Exercício 4.9. Obtenha um intervalo de confiança Bayesiano para θ com coeficiente de confiança $\gamma = 0,95$. Como fica seu intervalo se $x = 4$?

5.13. Considere o Exercício 4.12. Construa um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$, sendo $r = \lambda = 2$. Considere $\theta = 2$ e simule uma amostra de X com $n = 10$. Como fica o intervalo com $\gamma = 0,95$?

5.14. Usando a amostra de tamanho $n = 20$ no Exemplo 3.1.6, construa um intervalo aproximado para θ, onde $f(x|\theta)$ é dada em (3.1.8).