6.7 Exercícios

6.1. Seja X uma variável aleatória com função de densidade $f(x|\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x}$, $x > 0, \theta > 0$. Queremos testar $H_0 : \theta = 1$ versus $H_1 : \theta = 2$.
i) Qual é a região crítica se $n = 5$ e $\alpha = 0,05$?
ii) Se $n = 1$, qual é o teste que minimiza $\alpha + \beta$? E qual o valor de $\alpha + \beta$?

6.2. Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu, 1)$. Queremos testar $H_0 : \mu = 0$ versus $H_1 : \mu = 1$. Encontre n que produz o teste mais poderoso com $\alpha = \beta = 0,05$.

6.3. Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com função de densidade dada por

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta - 1}, \quad 0 < x < 1 \quad , \quad \theta > 0.$$

i) Mostre que o teste mais poderoso para testar $H_0 : \theta = 1$ versus $H_1 : \theta = 2$, rejeita H_0, se e somente se, $\sum_{i=1}^{n} -log x_i \leq a$, onde a é uma constante.
ii) Sendo $n = 2$ e $\alpha = (1 - log 2)/2$, qual a região crítica?

6.4. Seja X uma única observação da função de densidade

$$f(x|\theta) = (2\theta x + 1 - \theta) I_{(0,1)}(x)$$

Queremos testar $H_0 : \theta = 0$ versus $H_1 : \theta = 1$.
i) Obtenha o teste mais poderoso com nível de significância α.
ii) Se $\alpha = 0,05$ e $x = 0,8$, qual a sua conclusão?

6.5. Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim Poisson(\theta)$.
i) Encontre o teste UMP para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$.
ii) Seja $\alpha = 0,05$, faça o gráfico da função poder para $\theta_0 = 1$ e $n = 25$ (use o Teorema do limite central).

6.6. Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu_X, 1)$ e sejam $Y_1, \dots, Y_m$ uma amostra aleatória da variável aleatória $Y \sim N(\mu_Y, 4)$ sendo as amostras independentes.
i) Determine o teste mais poderoso para testar

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y = 0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu_X = \mu_Y = 1$$

ii) Sendo $n = 9$, $\sum x_i = 3,95$; $m = 4$; $\sum y_i = 2,03$. Qual a sua conclusão ao nível de significância de 5%? E qual o poder do teste?

6.7. Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com f.d.p. dada por

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} x^{(1-\theta)/\theta}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0.$$

Queremos testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$.
i) Encontre o teste UMP de nível α (se existir).
ii) Se $n = 2$, $\theta_0 = 1$ e $\alpha = 0,05$, encontre a região crítica.

6.8. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(0, \sigma^2)$.
i) Encontre o teste UMP para testar $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ versus $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.
ii) Seja $\alpha = 0,05$, $n = 9$ e $\sigma_0^2 = 9$, faça o gráfico da função poder.

6.9. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim exp(\theta)$.
i) Encontre o teste da razão de verossimilhanças generalizada para testar

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta \neq 1.$$

ii) Se você observar $n = 5; x_1 = 0,8; x_2 = 1,3; x_3 = 1,8; x_4 = 0,9$ e $x_5 = 1,0$, qual a sua decisão ao nível de 5%?

6.10. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu_X, 9)$ e seja $Y_1, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória da variável aleatória $Y \sim N(\mu_Y, 25)$, sendo as amostras independentes.
i) Determine o teste da RVG para testar

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$$

ii) Sendo $n = 9$, $\sum x_i = 3,4$, $m = 16$, $\sum y_i = 4,3$. Qual a sua conclusão a um nível de significância de 5%?

6.11. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim Poisson(\theta_1)$ e sejam $Y_1, \ldots, Y_m$ uma amostra aleatória da variável aleatória $Y \sim Poisson(\theta_2)$ sendo as amostras independentes.
i) Encontre o teste da RVG(aproximado) para testar $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ versus $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$.
ii) Sendo $n = 5$, $\sum x_i = 3,8$; $m = 8$; $\sum y_i = 4,8$, qual a sua conclusão a um nível de significância de 5%?

6.12. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim exp(\theta_1)$ e sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $Y \sim exp(\theta_2)$, sendo as amostras independentes.
i) Determine o teste mais poderoso para testar

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = 1 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta_1 = \theta_2 = 2.$$

ii) Verifique se seu teste é UMP para testar

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = 1 \quad \text{versus} \quad H_1 : \theta_1 = \theta_2 > 1.$$

iii) Se você observar $n = 5$, $\overline{x} = 1,1$; $\overline{y} = 0,8$, qual a sua decisão ao nível de 5%?
iv) Determine o teste da RVG para testar $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ versus $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$.
v) Mostre que o teste acima é equivalente a um teste F exato.

6.13. Discuta a obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança dados em (6.5.5). Suponha que em uma população com três tipos de indivíduos, temos para uma amostra de $n = 100$ indivíduos, $n_1 = 26$ do tipo 1, $n_2 = 47$ do tipo 2 e $n_3 = 27$ do tipo 3. Verifique ao nível de 5% se a distribuição dos tipos de indivíduos na população segue o equilíbrio de Hardy-Weinberg.

6.14. Discuta a implementação de um procedimento (teste) para verificar se um dado é equilibrado, ou seja, para testar $H_0 : \theta_1 = \ldots = \theta_6$ sendo que n lançamentos do dado apresenta n_i ocorrência da face i, $i = 1, \ldots, 6$. Sendo $n = 120$, $n_1 = 23$, $n_2 = 18$, $n_3 = 15$, $n_4 = 21$, $n_5 = 27$ e $n_6 = 16$, qual sua decisão ao nível de 5%?

6.15. Um modelo genético para a distribuição dos tipos de sangue 1, 2, 3 e 4, especifica as proporções $\theta_1 = p(1;\theta) = (2+\theta)/4$, $\theta_2 = p(2;\theta) = (1-\theta)/4 = \theta_3 = p(3;\theta)$ e $\theta_4 = p(4;\theta) = \theta/4$. Uma amostra de $n = 100$ indivíduos da população apresenta $n_1 = 65$, $n_2 = 6$, $n_3 = 8$ e $n_4 = 21$. Verifique se os dados obtidos suportam o modelo genético acima para a distribuição dos tipos de sangue na população de onde foi selecionada a amostra.

6.16. Desenvolva o teste da razão de verossimilhanças generalizada para testar $H_0 : \beta = \beta_0$ versus $H_1 : \beta \neq \beta_0$ no modelo de regressão descrito no Exercício 2.12.

6.17. O teste t pareado. Sejam $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ uma amostra aleatória da variável aleatória bidimensional (X, Y) com distribuição normal bivariada como dada no Exemplo 2.4.4. Mostre que para testar $H_0 : \mu_x = \mu_y$ versus $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$, o teste da razão de verossimilhanças generalizado apresenta região crítica dada por

$$A^* = \{\mathbf{d}; \frac{\sqrt{n}|\overline{d}|}{S_d} > c\},$$

onde $\overline{d} = \sum_{i=1}^n d_i/n$ e $S_d^2 = \sum_{i=1}^n (d_i - \overline{d})^2/(n-1)$.