Curitiba, 23.10.2013

Prova 1

Matemática Aplicada I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: Gabarito

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos obtidos	Pontos totais		
1		12		
2		28		
3		30		
4		5		
5		10		
6		5	Porcentagem	
Soma		90		Nota
Final (corrigido)				

Questões

1. (12 Pontos) O código de Matlab/Octave seguinte representa uma aproximação numérica de um calculo:

```
>> X=0:1/2:4;
>> Y=X.*exp(-X);
>> Z=trapz(X,Y)
Z= 0.8867
```

   a. Faça o calculo do valor de Z exato analiticamente.
   b. Explique por que existe uma diferença entre o valor do método numérico e analítico (no máximo duas frases).
   c. Qual modificação simples no código poderia melhorar o resultado numérico?
   d. Quais outros métodos existem para resolver este calculo (mencione dois e descreva os usando no máximo uma frase).

Solução

   a. Faça o calculo do valor de Z exato analiticamente.

   $$\int_0^4 xe^{-x}dx = \left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^4 = 0{,}9084 \quad 4 \text{ pontos}$$

   b. Explique por que existe uma diferença entre o valor do método numérico e analítico (no máximo duas frases).
   O numero de trapézios é baixo. A aproximação com trapézios não é preciso.
   4 pontos
   c. Qual modificação simples no código poderia melhorar o resultado numérico?
   X=0:1/100:4;
   2 pontos
   d. Quais outros métodos numéricos existem para descrever (mencione dois e descreva os usado no Maximo uma frase).
   Usar aproximações com polinômios ou series Taylor que são muito fáceis para integrar e resolver analiticamente.
   2 pontos

2. (28 pontos) Dada a equação dv/dt = g - (c/m)*v com v sendo a velocidade, t o tempo, g a aceleração de gravidade, c = 12,5 kg/s uma constante de atrito e m = 68,1 kg a massa e tendo o valor inicial v(t=0)=0:
   a. Classifica o tipo da equação (edo/edp, ordem, lin./não-linear, homogêneo/não-homogeneo).
   b. Resolva a equação analiticamente e calcule os valores para t=0, t=2 e t=4.
   c. Descreva uma aproximação para calcular a velocidade num ponto futuro ($v(t_{i+1})$) utilizando uma serie de Taylor truncada após a primeira derivada.
   d. Utiliza a aproximação de c) para descrever uma aproximação da derivada dv/dt.
   e. Calcule os valores aproximados em t=0, t=2 e t=4 e compare com os valores exatos.
   f. Descreva em uma frase como poderiam ser obtidos resultados mais precisos.

Solução

   a. Classifica o tipo da equação (edo/edp, ordem, lin./não-linear, homogêneo/não-homogeneo).
   edo1, linear, não-homogeneo — 3 pontos
   b. Resolva a equação analiticamente e calcule os valores para t=0, t=2 e t=4.
   v(t) = gm/c (1 - exp(-c/m*t) — 5 pontos
   v(t=0) = 0, v(t=2) = 16,4 m/s, v(t=4) = 27,77 m/s — 3 pontos
   c. Descreva uma aproximação para calcular a velocidade num ponto futuro ($v(t_{i+1})$) utilizando uma serie de Taylor truncada após a primeira derivada.
   $v(t_{i+1}) \approx v(t_i) + v(t_i)' (t_{i+1} - t_i)$ — 2 pontos

d. Utiliza a aproximação de c) para descrever uma aproximação da derivada dv/dt.
   $dv/dt \approx [v(t_{i+1}) - v(t_i)]/(t_{i+1} - t_i)$ 2 pontos

e. Calcule os valores aproximados em t=0, t=2 e t=4 utilizando a aproximação de d) e compare com os valores exatos.
   $v(t_{i+1}) = v(t_i) + [g-(c/m)*v(t_i)]*(t_{i+1} - t_i)$ 4 pontos
   v(t=0)=0, v(t=2) = 19,6 m/s, v(t=4)=32m/s 3 pontos
   erro em t=2: 16,4 - 19,6 = -3,2 m/s 2 pontos
   erro em t=4: 27,77 - 32 =4,23 m/s 2 pontos

g. Descreva em uma frase como poderiam ser obtidos resultados mais precisos.
   Fazend um delta t menor ou aproximando com termos maiores no Taylor.
   2 pontos

3. (30 Pontos) A matriz X =[-6 -6 -7 0 7 6 6 -3 -3 0 0; -7 2 1 8 1 2 -7 -7 -2 -2 -7] representa pontos de uma casa (figura 1):

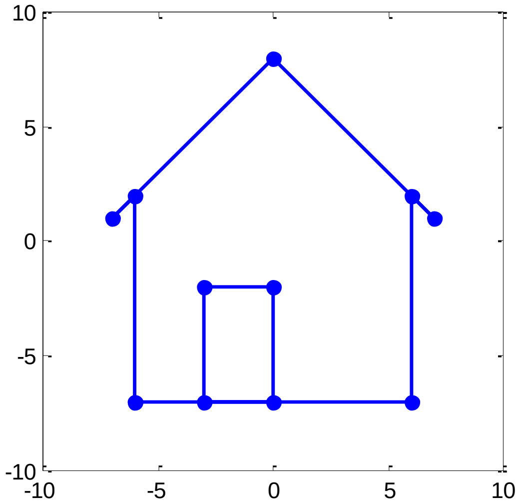


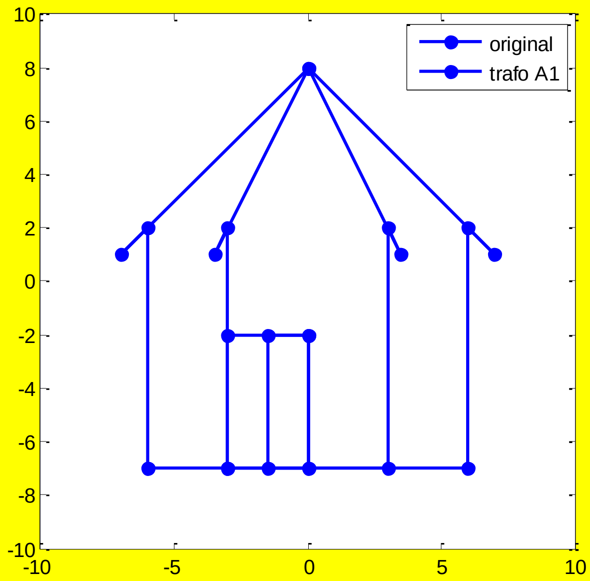
Figura 1: Casa com os pontos determinados pela Matriz X

a. Calcule o determinante, os autovalores, autovetores e o produto interno dos autovetores de cada Matriz A_i (veja em baixo). Determine demais características das matrizes A_i explicando assim o efeito da transformação $A_iX = B$ relacionado ao sentido, escala e direcao da transformação. Descreva este efeito em palavras (uma frase) ou com um desenho esquemático, não é necessário calcular B!
   i. A_1=[0,5 0 ; 0 1];
   ii. A_2=[cos(90°) -sin(90°);sin(90°) cos(90°)]
   iii. A_3=[1 1; -1 -1]

b. Determine e justifique para qual das Matrizes A_i não existe a inversa A^{-1}. Não é necessário de calcular a inversa!

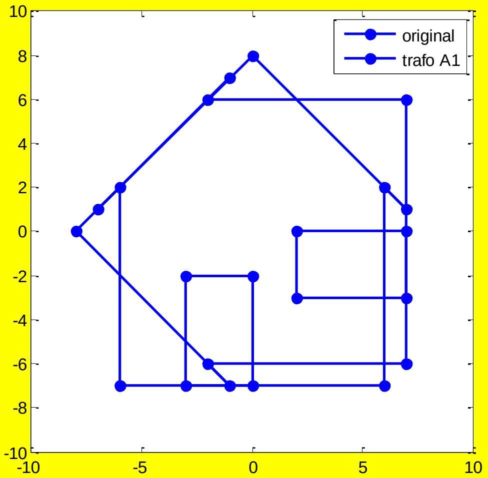
Solução

i. A_1=[0,5 0 ; 0 1];
- *Determinante positivo $det(A_1)=1/2$, mantem sentido (porta na esquerda)*
- *Matriz é simétrica → autovalores reais e perpendiculares*
- *$(0,5-\lambda_1)(1-\lambda_2)=0$ → Autovalores 0,5 e 1*
- *Autovetores correspondentes $[1 , 0]^T$ e $[0 , 1]^T$*
- *Produto interno = 0 → autovetores perpendiculares*
- *Matriz é diagonal, assim somente muda escala.*
- *Redução de escala no eixo horizontal (*0,5). Eixo vertical mantido.*
- *Det ≠ 0 → inversa existe*



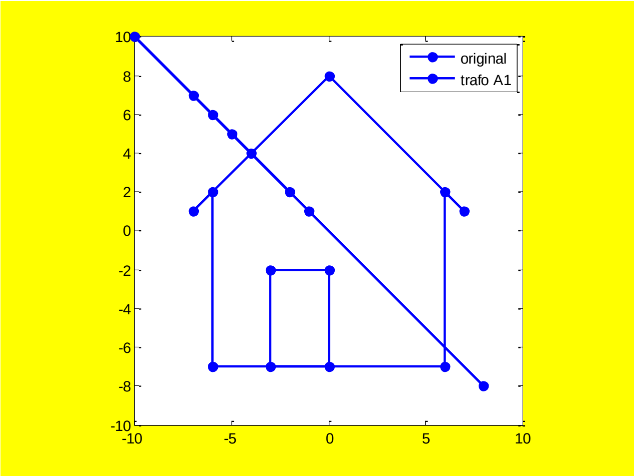
ii. A_4=[cos(90°) -sin(90°);sin(90°) cos(90°)]

- *Determinante positivo det(A_5)=1, mantem sentido (porta vai ficar na direita), det=1 significa matriz ortogonal*
- *Autovalores i e -i*
- *Autovetores correspondentes [sqrt(1/2) , sqrt(-1/2)]^T e [sqrt(1/2) , -sqrt(-1/2)]^T*
- *Matriz é anti-simétrica → autovalores complexas e perpendiculares*
- *Matriz de rotação*
- *Rotacao por 90° no sentido anti-horario*
- *Det ≠ 0 → inversa existe*

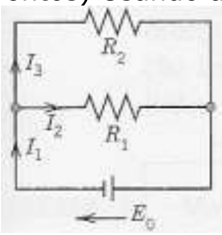


iii. A_5=[1 1; -1 -1]

- *Determinante det(A_6)=0, transformação para uma linha*
- *Autovalores 0 e 0*
- *Autovetor correspondentes [1 -1]^T*
- *Matriz é anti-simétrica → autovalores complexas ou zero*
- *Transformação para uma linha como diagonal segunda*
- *Não tem inversa porque Det = 0*



4. (5 Pontos) Usando as leis de Kirchhoff, calcule as correntes do circuito



Solução
$I_2 = E_o/R_1$, $I_3 = E_o/R_2$, $I_1 = (R_1 + R_2)E_o/(R_1R_2)$

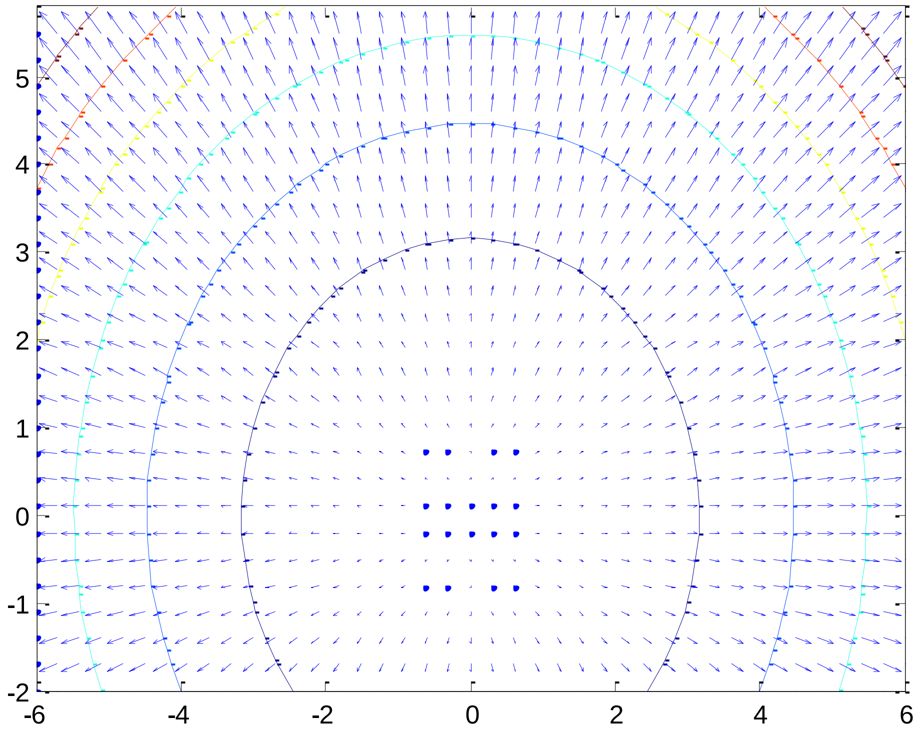
5. (10 Pontos) Experimentos mostram que, num campo de concentrações $C=x^3 - 3xy^2$, o fluxo de massa J por difusão é na direção de máximo decréscimo da concentração C ($J=-\nabla C$).
    a. Encontre essa direção em geral e num dado ponto $P:(8^{0.5},2^{0.5})$. Esboce a direção em P, usando uma seta.
    b. Calcule a taxa de variação da concentração em geral, considerando que a taxa pode ser representado como Taxa = $D\nabla^2C$, com D sendo uma constante.

Solução
    c. Encontre essa direção em geral e num dado ponto $P:(8^{0.5},2^{0.5})$. Esboce a direção em P, usando uma seta.
    $J = -\nabla C = -[3x^2 - 3y^2 , -6xy]^T = - [24-6= 18 , 6*4 = -24]^T = [-18\ 24]^T$

    d. Calcule a taxa de variação Taxa = $D\nabla^2C$, com α sendo uma constante.
    $Taxa = D\nabla^2C = D\ [6x , - 6x)]^T$

6. (5 Pontos) Dada a função $p = x^2 + y^2$:
    a. Represente graficamente algumas curvas de nível p = const.
    b. Encontre ∇p
    c. Indique ∇p usando setas em alguns pontos dessas curvas.

Solução
    a. Represente graficamente algumas curvas de nível p = const.



b. Encontre ∇p

∇p = $[2x\ 2y]^T$

c. Indique ∇p usando setas em alguns pontos dessas curvas.

Equações dadas:

Serie de Taylor: $f(x) = \Sigma^{\infty}_{m=0} (x-a)^m f^{(m)}(a)/m!$

Boa sorte!