Curitiba, 24.09.2014

Prova 1

Matemática Aplicada I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: ________________________________

GRR: ____________________________

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos obtidos	Pontos totais		
1		10		
2		35		
3		19		
4		5		
5		5		
6		16	Porcentagem	
Soma		90		Nota
Final (corrigido)				

Questões

1. (10 Pontos) O código de Matlab/Octave seguinte representa uma aproximação numérica de um calculo:

   ```
   >> X=0:4;
   >> Y=54*(1-exp(-0.18*X));
   >> Z=trapz(X,Y)
   Resultado: Z= 61.6102
   ```

   a. Descreva o conceito do método numérico em no máximo uma frase.
   b. Descreva o calculo e faça o calculo do valor de Z exato analiticamente, considerando que Z(X=0)=0
   c. Explique por que existe uma diferença entre o valor do método numérico e analítico (no máximo duas frases) e quantifique a diferença com erro absoluto e relativo.
   d. Qual modificação no código poderia melhorar o resultado numérico?
   e. Quais outros métodos existem para resolver este calculo (mencione dois e descreva os usando no máximo uma frase).

Solução

a. 1P O método calcula a integral aproximando a área com trapézios.
b. 4P Faça o calculo do valor de Z exato analiticamente.

   Z= $\int y(x)dx = \int 54 - 54e^{-0.18x}dx \; = 54x + 54/0.18e^{-0.18x} + C$

   com Z(x=0)=0 → C = -54/0.18

   Avaliar para x de 0 a 4: $54*4 + 54/0.18e^{-0.18*4} - 54/0.18 - 0$ = 62
c. 3P *O numero de trapézios é baixo. A aproximação com trapézios não é preciso. Diferença absoluta é de 0.84 e relativa é 0.84/62 = 1,4%*
d. 1P *X=0:1/100:4;*
e. 1P *Usar aproximações com polinômios ou series Taylor que são muito fáceis para integrar e resolver analiticamente.*

2. (35 Pontos) Consideramos uma membrana elástica no plano x_1x_2 delimitada pelo círculo $x_1^2 + x_2^2 = 1$ e que é esticada de forma que um ponto P:(x_1, x_2) vai até o ponto Q:(y_1, y_2) dado por $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

   a. Encontre as direções principais, isto é, as direções do vetor-posição $\vec{x}$ de P para as quais a direcao do vetor-posição $\vec{y}$ de Q é a mesma ou exatamente a oposta.
   b. Qual é o angulo entre as direções principais?
   c. Que forma assume o círculo-limite sob essa deformação? Faca um desenho esquemático com o circulo, os vetores das direções principais e a deformação final.
   d. A deformação modifique a área da membrana (reduz, mantém, aumenta?)? Quantifique a modificação da área se houver.
   e. A deformação mantém o sentido da membrana? Justifique sua resposta com poucas palavras.
   f. Calcule o vetor $\vec{x}$ do qual surgiu o vetor $\vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ obrigatoriamente calculando a inversa da Matriz A.
   g. Desenha a transformação do vetor da questão f) e do resultado no esquema da questão c)
   h. O vetor $\vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ representa uma direcao principal? Justifique sua proposta em poucas palavras.

Solução

a. 15P Equação característica: (1-λ)(4- λ) + 2 = 0 com soluções $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$ e autovetores correspondentes: $[-1\ 1]^T$ e $[-2\ 1]^T$

b. 4P 18,4°
c. 5P Desenho
d. 2P det A = 6 (aumento da área com o fator de 6)
e. 2P det A é positivo: mantem sentido
f. 5P inv (A) = [0.6667 0.3333; -0.1667 0.1667], x = [0.33 0.33]
g. 1P
h. 1P não

3. (5 P) Dada a função f(x,z,t) = A(t)sen(πz)sen(ax), 0 ≤ z ≤ 1, -∞ < x < +∞, a>0 representando um escoamento de um fluido entre duas placas e o campo de velocidade u = (u, 0, w) com u = -∂f/∂z e w = ∂f/∂x calcule a vorticidade ω(x,z,t) = ∇ x u, e a divergência do campo de velocidade.

Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 09 Jul 2010
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

1 [25] Em um artigo histórico que deu início à moderna Teoria do Caos [E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J Atmos Sci*, 1963, v. 20, p. 130–141], Edward Lorenz utilizou a função-corrente

$$\Psi(x,z,t) = A(t)\,\mathrm{sen}(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax),\ 0 \le z \le 1,\ -\infty < x < +\infty,$$

onde $a > 0 \in \mathbb{R}$, para representar o escoamento em um fluido entre duas placas devido à convecção livre gerada por uma temperatura maior na placa inferior do que na superior. Sabendo que o campo de velocidade $\boldsymbol{u} = (u, 0, w)$ pode ser recuperado via

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \\ w &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \end{aligned}$$

calcule a vorticidade $\boldsymbol{\omega}(x,z,t) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}$, e a divergência do campo de velocidade.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Em 3 D,

$$\boldsymbol{u} = (-\pi A\cos(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax), 0, Aa\,\mathrm{sen}(\pi z)\cos(ax));$$

a vorticidade é

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\pi A\cos(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax) & 0 & Aa\,\mathrm{sen}(\pi z)\cos(ax) \end{vmatrix} \\ &= \left[\pi^2 A\,\mathrm{sen}(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax) + a^2 A\,\mathrm{sen}(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax)\right]\boldsymbol{j} \\ &= (\pi^2 + a^2)A(t)\,\mathrm{sen}(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax)\boldsymbol{j}; \end{aligned}$$

a divergência é

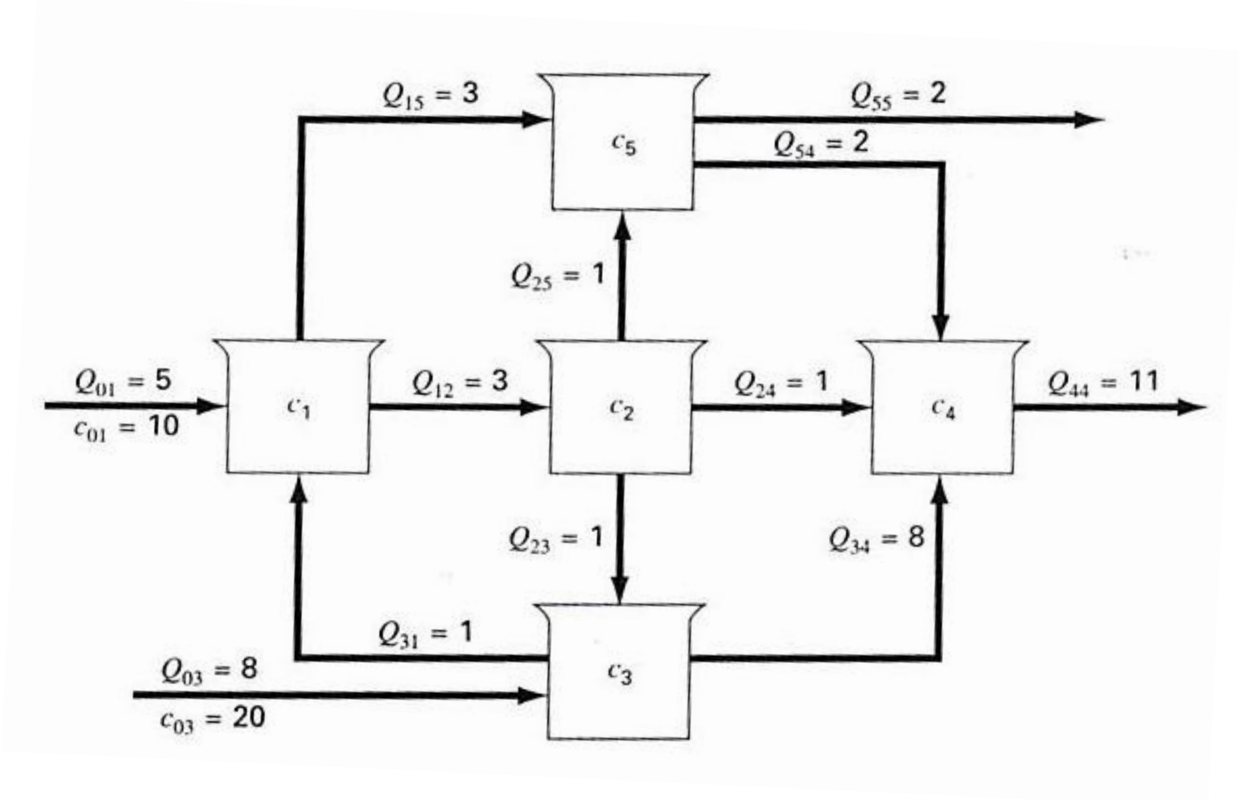
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} &= -\frac{\partial}{\partial x}(\pi A\cos(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax)) + \frac{\partial}{\partial z}(Aa\,\mathrm{sen}(\pi z)\cos(ax)) \\ &= -\pi Aa\cos(\pi z)\cos(ax) + \pi Aa\cos(\pi z)\cos(ax) = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

4. (5 Pontos) Experimentos mostram que, num campo de concentrações C=x³ - 3xy², o fluxo de massa J por difusão é na direção de máximo decréscimo da concentração C (J=-∇C).
   a. Encontre essa direção em geral e num dado ponto P:($8^{0.5}$,$2^{0.5}$). Esboce a direção em P, usando uma seta.
   b. Calcule a taxa de variação da concentração em geral, considerando que a taxa pode ser representado como Taxa = D∇²C, com D sendo uma constante.

Solução
   c. Encontre essa direção em geral e num dado ponto P:($8^{0.5}$,$2^{0.5}$). Esboce a direção em P, usando uma seta.
      *J = - ∇C = -[3x² - 3y² , -6xy]^T = - [24-6= 18 , 6*4 = -24]^T = [-18 24]^T*

d. Calcule a taxa de variação Taxa = $D\nabla^2C$, com α sendo uma constante.
   Taxa = $D\nabla^2C = D\,[6x\ ,\ -\ 6x)]^T$

5. (19 Pontos) Considera o sistema permanente de reatores interligados (todos completamente misturados) na seguinte figura onde Q define a vazão (m³/min.) e c a concentração (mg/m³) para cada tubulação.



a. Descreva as equações de conservação de massa para todos os reatores do sistema.
b. Escreva as equações em forma de um calculo matricial para obter os valores de concentração em cada reator.
c. Descreva o algoritmo e o(s) comandos em Matlab/Octave para obter o resultado de concentrações em cada reator (não é necessário fazer o calculo!).

Solução

a. 10P

$Q_{12}c_1 + Q_{15}c_1$

Because the system is at steady state, the inflows and outflows must be equal:

$$5(10) + Q_{31}c_3 = Q_{12}c_1 + Q_{15}c_1$$

or, substituting the values for flow from Fig. 12.3,

$$6c_1 - c_3 = 50$$

Similar equations can be developed for the other reactors:

$$-3c_1 + 3c_2 = 0$$
$$-c_2 + 9c_3 = 160$$
$$-c_2 - 8c_3 + 11c_4 - 2c_5 = 0$$
$$-3c_1 - c_2 + 4c_5 = 0$$

...method can be used to solve these five equations for the five unknown

b. 8P [6 0 -1 0 0   50

b. 8P	[6 0 -1 0 0		50
	-3 3 0 0 0		0
	0 -1 9 0 0	*C =	160
	0 -1 -8 11 -2		0
	-3 -1 0 0 4		0

c. 1P C = A\b

2P não

6. (16P) Avalie as frases seguintes, escrevendo se são verdadeiras ou falsas (*resposta certa: pontuação positiva; resposta errada: pontuação negativa; sem resposta: 0, pontuação mínima nesta questão: 0)*:

   a. "Na comparação de cálculos computacionais com resultados analíticos pode se dizer que o erro numérico absoluto é sempre maior que o erro numérico relativo"

      a afirmação é falsa, por exemplo: erro absoluto 3 e valor real é 0.01, assim erro relativo é 3/0.01 = 30.000 %

   b. "A iteração de Gauss-Seidel converge para todo que valor inicial se e somente se todos os autovalores da matriz de iteração tiveram módulos maiores que 1. "

      a afirmação é verdadeira

   c. "O método de Newton-Raphson é utilizado para achar raízes de funções e pode ser deduzido com as series de Taylor"

      a afirmação é verdadeira

   d. "Os comandos diff e gradient em Matlab/Octave calculem diferenças entre os n elementos de um vetor. Porem o comando gradient retorna n-1 diferenças e o comando diff n diferenças."

      a afirmação é falsa, é o contrario

   e. "Os campos de gradiente são irrotacionais, assim rot(grad f) = 1"

      a afirmação é falsa, deve ser igual a zero

   f. "Nos métodos de regressão linear utiliza-se critérios de calcular e minimizar erros quadráticos em vez de erros absolutos para obter uma solução única e não varias soluções possíveis."

      a afirmação é verdadeira

   g. "Numa regressão linear utilizando o método dos mínimos quadrados obteve se um valor do coeficiente de correlação $r^2 = 0.868$ (ou $r = 0.932$) qual indica que 86,8 % da incerteza original foi explicado pelo modelo linear."

      a afirmação é verdadeira

   h. "Uma regressão linear utilizando o método dos mínimos quadrados é julgado aceitável, quando o valor do desvio padrão é menor que o valor do erro padrão"

      a afirmação é falsa (o contrario)