Curitiba, 02.10.2015

Prova 1

Matemática Aplicada I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: ________________________________

GRR: ____________________________

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos obtidos	Pontos totais		
1		15		
2		35		
3		20		
4		20		
5				
6			Porcentagem	
Soma		90		Nota
Final (corrigido)				

Questões

1. (15P) Utiliza a expansão em series de Taylor com a ordem n = 0 a 3 para aproximar a função $y(x) = sen^2(x)$ em $x_{i+1} = \pi/3$ na base do valor de y(x) e das derivadas em $x_i = \pi/4$. Calcule os valores e o erro absoluto e relativo para cada aproximação.

Solução:
$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + f''(x_i)h^2 1/2! + \ldots..$
$x_i = pi/4$; $x_{i+1} = pi/3$
$f(x) = sen^2(x) = ½ - 1/2cos(2x)$
$f'(x) = 0 + sem(2x)$
$f''(x) = 2cos2x$
$f'''(x) = -4sen(2x)$

n=0:
$f(x_{i+1}) = f(x_i) = ½$
valor real f(pi/3 = 0,75
$e_{abs} = 0,25$; $e_{rel} = 33,3\%$

n=1:
$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h = ½ + 1(PI/3-Pi/4) = 0,762$
$e_{abs} = -0,012$; $e_{rel} = -1,54\%$

n=2:
$f(x_{i+1}) = 0.762 + 0 = 0,762$
$e_{abs} = -0,012$; $e_{rel} = -1,54\%$

n=3:
$f(x_{i+1}) = 0.762 + (-4)1/3!(PI/3-Pi/4)$^3 = 0,762 - 0,012 = 0,7500
$e_{abs} = 3*10$^-4; $e_{rel} = 0,02\%$

2. (35 Pontos) Consideramos uma elemento quadrado no plano x-y delimitada pelo dois vetores unitários **i** e **j** e que é transformada de forma que um ponto P:(x_1, x_2) vai até o ponto Q:(y_1, y_2) dado por $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
   a. Encontre as direções principais, isto é, as direções do vetor-posição $\vec{x}$ de P para as quais a direcao do vetor-posição $\vec{y}$ de Q é a mesma ou exatamente a oposta.
   b. Qual é o angulo entre as direções principais?
   c. Que forma assume o quadrado sob essa deformação? Faca um desenho esquematico com o quadrado, os vetores das direções principais e a deformação final.
   d. A deformação modifique a área do quadrado (justifique e quantifique sua resposta com uma frase)?
   e. A deformação mantém o sentido do quadrado? Justifique sua resposta com poucas palavras.
   f. Calcule o vetor $\vec{x}$ do qual surgiu o vetor $\vec{y} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$ obrigatoriamente calculando a inversa da Matriz A.
   g. Desenha a transformação do vetor da questão f) e do resultado da transformação no esquema da questão c)
   h. O vetor $\vec{y} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$ representa uma direcao principal? Justifique sua proposta em poucas palavras.
   i. Mostre que a matriz A pode ser escrita como $A = S\Lambda S^{-1} = S\Lambda S^{-1}$ sendo S a matriz dos autovetores e Λ a matriz dos autovalores.
   j. Mostre com i) que $A^2 = S\Lambda^2 S^{-1}$
   k. Explique em uma frase a utilidade de j)

Solução:

a) $(2-\lambda)(2-\lambda)-1=0$

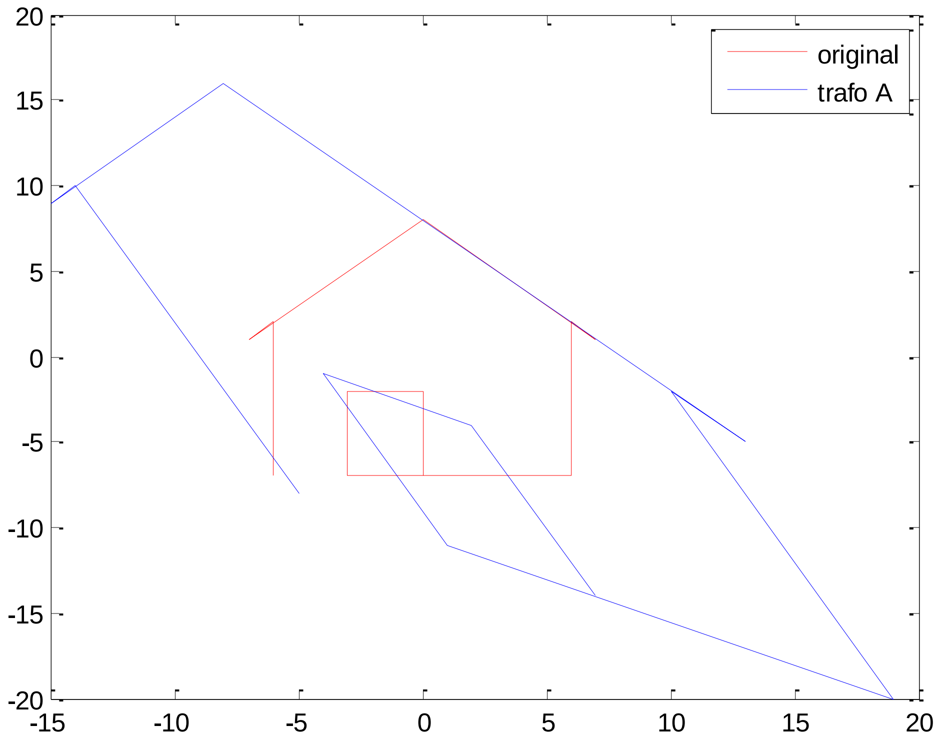
$\lambda^2 -4\lambda+3=0$

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$

$\lambda_1 = 3$: $-x_1 - x_2 = 0$; $-x_1 = x_2$; escolhe $x_2 = 1 \rightarrow x_1 = -1$

$\lambda_2 = 1$: $x_1 - x_2 = 0$; $x_1 = x_2$; escolhe $x_2 = 1 \rightarrow x_1 = 1$

b) autovet$_1$*autovet$_2$ = |autovet$_1$||autovet$_2$|cós(φ) <=> (-1+1)/2 = 0 = cós(φ) → φ = 90°



c)

d) det(A) = 4-1 = 3, modifique área três vezes maior

e) Mantem sentido porque det(A) é positivo (porta não muda do lado)

f) $Ax=y \iff x=A^{-1}y$

$A^{-1} = 1/\det(A)[a_{22}\ -a_{12}; -a_{21}\ a_{11}] = [2/3\ 1/3;\ 1/3\ 2/3]$

$A^{-1}\ (0{,}5;0{,}5) = (2/3*0{,}5 + 1/3*0{,}5;\ 1/3*0{,}5+2/3*0{,}5) = (0{,}5;\ 0{,}5)$

g) figura

h) Sim, é autovetor com autovalor 1 A(0,5 0,5)=1(0,5 0,5)

i) Matriz dos autovetores (normalizado) S = 1/sqrt(2)* [-1 1; 1 1]

det (S) =-1

$S\Lambda S^{-1}$ = 1/sqrt(2)*[-1 1; 1 1]*[3 0; 0 1]*1/(-1)*1/sqrt(2)*[1 -1; -1 -1] = A

$S\Lambda S^{t}$ = 1/raiz(2)[-1 1; 1 1]*[3 0; 0 1]*1/raiz(2)[-1 1; 1 1] = A

j) $A^2 = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1}) = (S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1}) = (S\Lambda I\Lambda S^{-1}) = (S\Lambda\Lambda S^{-1}) = S\Lambda^2 S^{-1}$

k) O quadrado da matriz de autovalores é muito fácil para calcular, já que somente faz quadrado dos elementos na diagonal.Assim cálculos repetidos podem ser simplificados.

3. (20 Pontos) Consideramos $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{y} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$

a. Calcule x_1 e x_2 utilizando o método iterativo de Gauss-Seidel.

b. Descreva uma vantagem e uma desvantagem dos métodos de Gauss-Seidel em comparação ao método de Gauss

a) $2x_1-x_2=0{,}5$

$-x_1+2x_2=0{,}5$

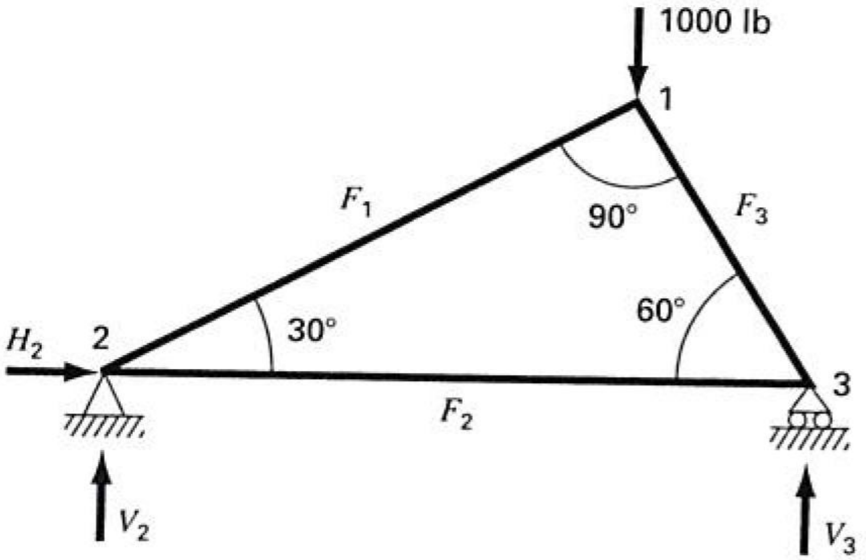
$x_1 = (0{,}5+x_2)/2$

$x_2 = (0{,}5+x_1)/2$

arbitrando valor inicial: $x_1 = x_2 = 1$:
$x_1^1 = 0{,}75$
$x_2^1 = (0{,}5 + x_1^1)/2 = 0{,}625$
$x_1^2 = 0{,}5625$
$x_2^2 = 0{,}5313$
$x_1^3 = 0{,}5156$
$x_2^3 = 0{,}5078$

Vantagem Gauss: converge sempre
Desvantagem Gauss: pode custar muitos calculos
Desvantagem Gauss-Seidel: pode não converger
Vantagem Gauss-Seidel: exige menos iterações ou cálculos para obter resultado

4. (20 Pontos) Considera a treliça em equilíbrio na seguinte figura onde H e V definem os componentes das forcas horizontais e verticais em cada no.



a. Descreva as equações de equilíbrio de forças para todos os nós do sistema.
b. Escreva as equações em forma de um calculo matricial para obter os valores de força em cada nó.
c. Descreva o algoritmo ou o(s) comandos em Matlab/Octave para obter o resultado de forcas em cada nó (não é necessário fazer o calculo!).

a) No 1:
$\Sigma F_H = 0 = -F_1\cos30° + F_3\cos60°$
$\Sigma F_V = 0 = -F_1\sin30° - F_3\sin60° - 1000$
No 2:
$\Sigma F_H = 0 = F_2 + F_1\cos30° + H_2$
$\Sigma F_V = 0 = F_1\sin30° + V_2$
No 3:
$\Sigma F_H = 0 = -F_2 - F_3\cos60°$
$\Sigma F_V = 0 = F_3\sin60° + V_3$

b)

$$\begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.866 & 0 & 0 & 0 \\ -0.866 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.866 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ H_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c) Define matriz A, define vetor b, fazer calculo x=A\b