



Universidade Federal do Paraná
Setor de Tecnologia - TC

Matemática Aplicada I
Engenharia Ambiental 2013-2

Curitiba, 11.12.2013

Prova 2

Matemática Aplicada I

Tobias Bleninger

Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome:

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos obtidos	Pontos totais		
1		45		
2		15		
3		10		
4		20	Porcentagem	
Soma		90		Nota
Final (corrigido)				

Questões

1. (45 Pontos) Dada a equação $y' - y = 3x^3 + \sin 3x$ com a condição inicial $y(0) = -1,5$
 - a. Classifica e resolve analiticamente
 - b. Discretiza a equação para calcular a solução numericamente utilizando o método Euler progressivo e o método Euler regressivo (não é necessário escrever o código todo, somente as equações para calcular y_{i+1})
 - c. A Figura 1 mostra o resultado da solução numérica da equação, bem como o erro entre a solução analítica e as duas soluções numéricas.
 - i. Avalie o resultado indicando se o calculo foi feito certo. Senão, descreva porque não. (frase curta)
 - ii. Como o calculo da solução numérica pode ser melhorado (erro menor)?

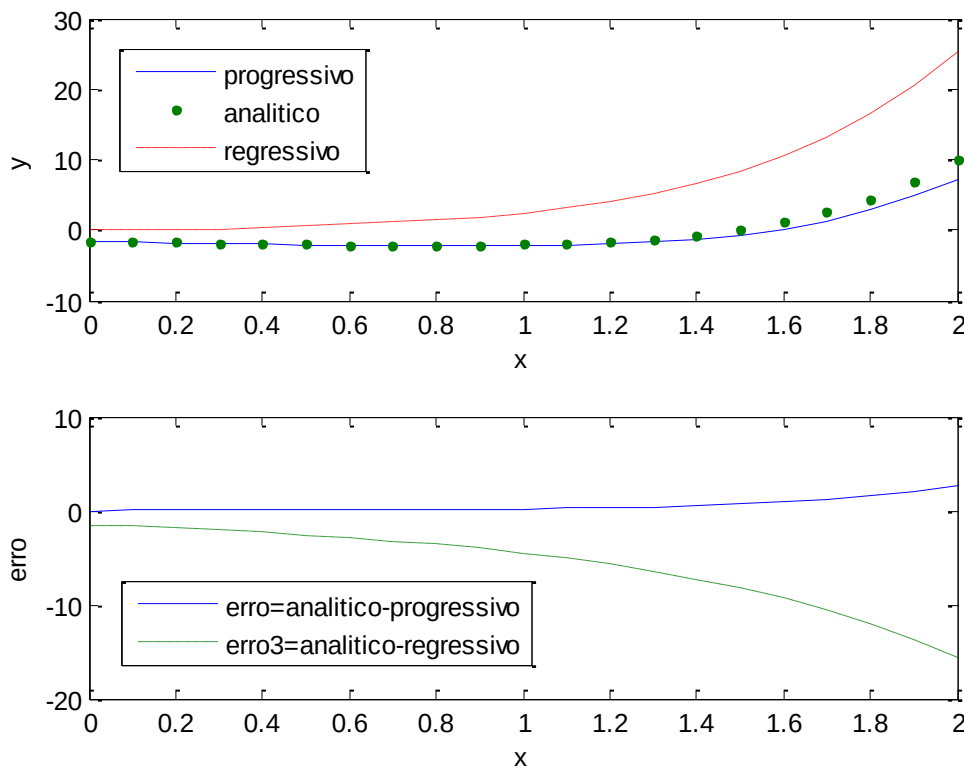


Figura 1: Solução numerica

Solução:

a)

Primeira ordem, linear, não - homogêneo (2P)

Polinômio: $y_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y_1'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

na edo: $3ax^2 + 2bx + c - ax^3 - bx^2 - cx - d = 3x^3$

$\Leftrightarrow (-3-a)x^3 + (3a-b)x^2 + (2b-c)x + c-d = 0$

$a = -3 \rightarrow b = -9 \rightarrow c = -18 \rightarrow d = -18$

$y_1(x) = -3x^3 - 9x^2 - 18x - 18$

(10P)

$y_2'(x) = 3a\cos 3x - 3b\sin 3x$

na edo: $3a\cos 3x - 3b\sin 3x - a\sin 3x - b\cos 3x = \sin 3x$

$\Leftrightarrow (-3b-a-1)\sin 3x + (3a-b)\cos 3x = 0$

$\Leftrightarrow (-3b-a-1) = 0$ e $3a-b = 0$

$\Leftrightarrow 3a = b$ e $a = -1/10$ e $b = -3/10$

$$y_2(x) = -1/10 \sin 3x - 3/10 \cos 3x$$

(10P)

$$y_h(x) = Ce^x$$

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = -3x^3 - 9x^2 - 18x - 18 - 1/10 \sin 3x - 3/10 \cos 3x$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^x - 3x^3 - 9x^2 - 18x - 18 - 1/10 \sin 3x - 3/10 \cos 3x$$

(5P)

Condições iniciais

$$y(0) = C - 18 - 3/10 = -1,5$$

$$C = 16,8$$

(5P)

$$\Sigma_{1a} = 30P$$

b)

Progressivo

$$y' = 3x^3 + \sin 3x + y$$

$$(y_{i+1} - y_i)/dx = 3x_i^3 + \sin(3x_i) + y_i$$

$$y_{i+1} = (3x_i^3 + \sin(3x_i) + y_i) * dx + y_i$$

Regressivo:

$$y' = 3x^3 + \sin 3x + y$$

$$(y_{i+1} - y_i)/dx = 3x_{i+1}^3 + \sin(3x_{i+1}) + y_{i+1}$$

$$y_{i+1} - y_i - y_{i+1} dx = dx (3x_{i+1})^3 + \sin(3x_{i+1}) dx$$

$$y_{i+1} = (dx[(3x_{i+1})^3 + \sin(3x_{i+1})] + y_i) / (1 - dx)$$

$$\Sigma_{1b} = 10P$$

c)

i) Condição inicial para solução com Euler regressivo esta errado. Deve ser igual a -1,5. Por isto o erro grande se propaga também com maior valor.

ii) Reduzindo o passo dx

$$\Sigma_{1c} = 5P$$

$$\Sigma_1 = 30 + 10 + 5 = 45P$$

2. Obtenha a solução de Frobenius de $x^2 y'' + 2xy' + (x^2 - 2)y = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r};$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1};$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}.$$

Junte tudo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} = 0.$$

O somatório discordante é o último:

$$m+r+2 = n+r;$$

$$m+2 = n;$$

$$m = n-2.$$

Então:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0.$$

Separe os casos $n=0$ e $n=1$:

$$[(r-1)r + 2r - 2] a_0 x^r + [r(r+1) + 2(r+1) - 2] a_1 x^{r+1} +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+r-1)(n+r) + 2(n+r) - 2] a_n + a_{n-2}\} x^{n+r} = 0.$$

A equação indicial é $r^2 + r - 2 = 0$; as raízes são $r = -2$ e $r = 1$. A maior raiz sempre leva a *uma* solução, que é o que se pede. Para $r = 1$, o coeficiente de a_1 é 4, donde $a_1 = 0$. Salvam-se apenas os a 's ímpares. A relação de recursão é

$$[n(n+1) + 2(n+1) - 1] a_n + a_{n-2} = 0,$$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2 + 3n}.$$

A solução é

$$y_1(x) = a_0 \left[x - \frac{1}{10} x^3 + \frac{1}{280} x^5 - \frac{1}{15120} x^7 + \dots \right] \blacksquare$$

Solução: 15 P

3. (10P) Dado o seguinte código em Matlab ou Octave

```
funcao = @(x,y) [y(2); x*cos(x)];
r=[1 7];
y0=[0.1;-2*sin(1)+cos(1)];
ode45(funcao,r,y0)
```

- Escreva a equação diferencial resolvida numericamente com este código.
- Escreva a condição inicial.
- Escreva o intervalo da solução.
- Qual é a ordem de precisão deste método?

Solução

a) $\frac{d^2 y}{dx^2} = x \cos x$

- b) $y(1) = 0.1$ e $y'(1) = -2\sin(1) + \cos(1)$
 c) intervalo $(1,7)$
 d) quarta ordem

4. (15P) Utilizando obrigatoriamente transformada de Laplace, resolva:

$$\frac{dh}{dt} + 3h = \sin(3t), \quad h(0) = 1.$$

Solucao

$$dh/dt + 3h = \sin(3t), \quad h(0) = 1$$

$$sH(s) - h(0) + 3H(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$H(s + 3) = 1 + \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$H = \frac{1}{s + 3} + \frac{3}{(s^2 + 9)(s + 3)}$$

$$H = \frac{1}{s + 3} + \frac{A}{s + 3} + \frac{Bs + C}{s^2 + 9}$$

$$H = \frac{1}{s + 3} + \frac{1/6}{s + 3} - \frac{1/6s}{s^2 + 9} + \frac{3/6}{s^2 + 9}$$

$$H = \frac{7/6}{s + 3} + 1/6 \left(-\frac{s}{s^2 + 9} + \frac{3}{s^2 + 9} \right)$$

$$h(t) = 7/6 e^{-3t} + 1/6(-\cos(3t) + \sin(3t))$$

Equações dadas:

Series de Frobenius:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r};$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1};$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}.$$

Derivadas das Transformadas de Laplace de uma função f(t)

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

Algumas funções f(t) e suas Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$		$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	1	$1/s$	7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
2	t	$1/s^2$	8	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
3	t^2	$2!/s^3$	9	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
4	t^n ($n = 0, 1, \dots$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
5	t^a (a positivo)	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	11	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12	$e^{at} \text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$

Boa sorte!