Curitiba, 10.12.2014

# Prova Final
# Matemática Aplicada I

*Tobias Bleninger*
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: ________________________________

GRR: ____________________________

Pontuação (preenchido pelo Professor):

| Questão | Pontos obtidos | Pontos totais | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 15 | | |
| 2 | | 45 | | |
| 3 | | 8 | | |
| 4 | | 12 | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | Porcentagem | |
| Soma | | 90 | | Nota |
| Final (corrigido) | | | | |

**Questões**

1. (15P) Dado a equação $\frac{dx}{dt} + 3x - \text{sen}(3t) = 0$, $x(0) = 2$.
    a. Classifique a equação (ordem, linear/não linear, homogêneo/não-homogeneo).
    b. Utilizando obrigatoriamente transformada de Laplace, resolva a equação.

Solução:

Edo1, linear, não homogeneo

$$s\,X(s) - X(0) + 3X(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$$
$$X\,(s + 3) = 2 + \frac{3}{s^2 + 9}$$
$$X = \frac{2}{s + 3} + \frac{3}{(s^2 + 9)(s+3)}$$
$$X = \frac{2}{s + 3} + \frac{A}{s+3} + \frac{Bs + C}{s^2+9}$$
$$X = \frac{2}{s + 3} + \frac{1/6}{s+3} - \frac{1/6s}{s^2+9} + \frac{3/6}{s^2+9}$$
$$X = \frac{13/6}{s + 3} + 1/6\left(-\frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{s^2+9}\right)$$
$x(t) = 13/6\, e^{-3t} + 1/6(-\cos(3t) + \text{sen}(3t))$

2. (45 P) Dada a equação: $h''' - h'' - 4h' + 4h + 4 = 0$ com as condições iniciais $h(0)= 1$, $h'(0)=1$, $h''(0)=0$
    a. Calcule analiticamente a solução da equação transformando-a, obrigatoriamente em um sistema de equações diferenciais e resolvendo o sistema.
    b. Descreva um código da solução numérica utilizando um método implementado no Matlab (por exemplo ode23).

Solução homogênea

**h** $= [h(t)\ h'(t)\ h''(t)]^t = [h_1(t)\ h_2(t)\ h_3(t)]^t$

**h'** $= [h'(t)\ h''(t)\ h'''(t)]^t = [h_1'(t)\ h_2'(t)\ h_3'(t)]^t = [h_2(t)\ h_3(t)\ (h_3(t) + 4h_2(t) - 4h_1(t))]^t$

em forma matricial:

$$\mathbf{h'} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{matrix}\ \mathbf{h} \quad \mathbf{=} \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{matrix}\ \begin{matrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{matrix}$$

$$A-\lambda I = \begin{matrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -4 & 4 & 1-\lambda \end{matrix}$$

$\det(A-\lambda I) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

$= (-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) + (-4) + 0 - 0 - 4(-\lambda) - 0$

$= \lambda^2(1-\lambda) + 4\lambda - 4$

$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$

➔ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$

Autovetores correspondentes:

$\lambda_1 = 1$:

$Ax = \lambda x$

0 1 0 $\quad x_{12} = x_{11} \quad$ 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x_1} = \mathbf{1x_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{12} = x_{11} \\ x_{13} = x_{12} \\ -4x_{11} + 4x_{12} + x_{13} = x_{13} \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x_2} = \mathbf{2x_2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{22} = 2x_{21} \\ x_{23} = 2x_{22} \\ -4x_{21} + 4x_{22} + x_{23} = 2x_{23} \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x_3} = \mathbf{-2x_3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{32} = -2x_{31} \\ x_{33} = -2x_{32} \\ -4x_{31} + 4x_{32} + x_{33} = -2x_{33} \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{h_h} = c_1e^{\lambda 1t}\,\mathbf{x_1} + c_2e^{\lambda 2t}\,\mathbf{x_2} + c_3e^{\lambda 3t}\,\mathbf{x_3} = c_1e^{t}\,\mathbf{x_1} + c_2e^{2t}\,\mathbf{x_2} + c_3e^{-2t}\,\mathbf{x_3}$

$h_h(t) = h_1(t) = c_1e^{t} + c_2e^{2t} + c_3e^{-2t}$

Depois achar solução não homogênea

$h_p = ax + b$

$h_p' = a,\ y_p'' = 0,\ y_p''' = 0$

$\rightarrow 0 - 0 - 4a + 4(ax+b) + 4 = 0$

$\rightarrow 4ax - 4a + 4b + 4 = 0$

$\rightarrow 4a = 0 \rightarrow a=0$

$\rightarrow 4b + 4 = 0$

$\rightarrow b = -1$

Vetor da solução particular: $\mathbf{h_p} = \begin{bmatrix} y_p = -1 \\ y_p' = 0 \\ y_p'' = 0 \end{bmatrix}$

Solução geral

$\mathbf{h} = c_1e^{\lambda 1t}\,\mathbf{x_1} + c_2e^{\lambda 2t}\,\mathbf{x_2} + c_3e^{\lambda 3t}\,\mathbf{x_3} + h_p$

Cond. Iniciais:

$h(0) = c_1 + c_2 + c_3 - 1 = 1$

$h'(0) = c_1 + 2c_2 - 2c_3 = 1$

$h''(0) = c_1 + 4c_2 + 4c_3 = 0$

$4*1-3$: $3c_1 = 8 \Leftrightarrow c_1 = 8/3$

$2*2-3$: $8/3 - 8c_3 = 2 \Leftrightarrow c_3 = -1/12$

➔ $8/3 + c_2 - 1/12 - 1 = 1 \Leftrightarrow c_2 = -7/12$

$h(t) = 8/3e^{t} + -7/12e^{2t} - 1/12e^{-2t} - 1$

```
funcao = @(t,h) [h(2); h(3); -2*h(3)+h(2)-3] % definicao funcao
tspan=[0 3]; % intervalo
h0=[1;1; 0]; % cond. iniciais
ode23(funcao,tspan,h0)  %solucao numerica
```

3. (8P) Dado o seguinte código em Matlab ou Octave

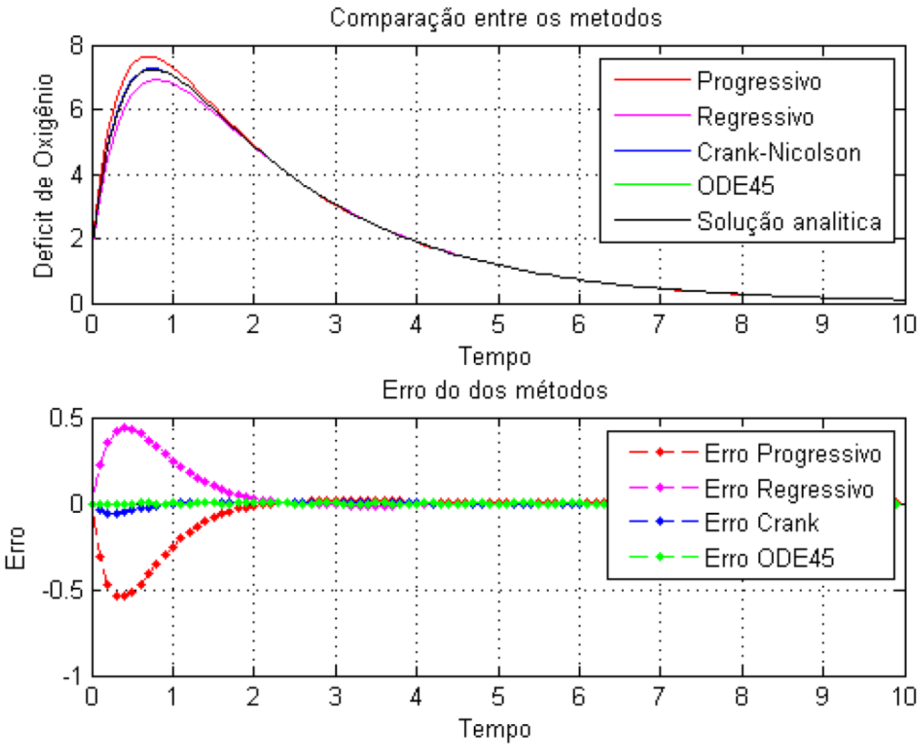
```
dt = 0.1;
t = [0.0:dt:2.0];
s = zeros(size(t));
s(1) = 2;
for i = 1:(length(t)-1)
s(i+1) = s(i) + dt * (-s(i)+(t(i))^2);
end
```

a. Escreva a equação diferencial resolvida numericamente com este código.

b. Escreva a condição inicial.
c. Escreva a resolução temporal do método numérico e o intervalo da solução.
d. Qual é o nome do método usado e a ordem de precisão?

a) $\frac{ds}{dt} = -s + t^2$
b) y(0.0) = 2
c) resolução: 0.1 e intervalo (0,2)
d) Euler progressivo, primeira ordem

4. (12P) Dado o seguinte resultado (figura seguinte) de soluções de uma equação diferencial para a equação de Streeter-Phelps




a. Descreva em uma frase os resultados da figura.
b. Justifique em uma frase qual método numérico tem o melhor desempenho.
c. Explique em uma frase porque o erro maximo entre o método regressivo e progressivo é diferente.
d. Explique em uma frase a diferença entre o método Crank-Nicolson e do ODE45

5. (16P) Avalie as frases seguintes, escrevendo se são verdadeiras ou falsas (*resposta certa: pontuação positiva; resposta errada: pontuação negativa; sem resposta: 0, pontuação mínima nesta questão: 0)*:

a. "A aplicacao do Teorema da divergencia de Gauss permite a transformação de integrais triplas sobre uma regiao em integrais duplas sobre a superficie do contorno da regiao"

☐ a afirmação é verdadeira

☐ a afirmação é falsa

b. "O método Runge-Kutta de segunda ordem resolve duas equações a mais para calcular os parámetros $k_1$ e $k_2$, e o método Runge-Kutta de quarta ordem resolve quatro equações a mais para calcular os parametros $k_1$ a $k_4$"

- [ ] a afirmação é verdadeira
- [ ] a afirmação é falsa

c. "A equação 3,4y' + 7,4+a(x)y = 8,3-b(x) é classificada como equação diferencial ordinaria linear de primeira ordem e inhomogenea"

- [ ] a afirmação é verdadeira
- [ ] a afirmação é falsa

d. "A equacao y(x)'-Ay(x) = -By(x)² é definido uma equação diferencial autonoma, porque não aparece o parametro independente x explicitamente"

a afirmação é verdadeira

e. "Nos métodos de regressão linear utiliza-se critérios de calcular e minimizar erros quadráticos em vez de erros absolutos para obter uma solução única e não varias soluções possíveis."

a afirmação é verdadeira

f. "Numa regressão linear utilizando o método dos mínimos quadrados obteve se um valor do coeficiente de correlação $r^2 = 0.93$ qual indica que 93,0 % da incerteza original foi explicado pelo modelo linear."

a afirmação é verdadeira

g. "Uma regressão linear utilizando o método dos mínimos quadrados é julgado aceitável, quando o valor do desvio padrão é menor que o valor do erro padrão"

a afirmação é falsa (o contrario)

**Derivadas das Transformadas de Laplace de uma função f(t)**

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$$
$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

**Algumas funções f(t) e suas Transformadas de Laplace**

| | $f(t)$ | $\mathcal{L}(f)$ |
|---|---|---|
| 1 | $1$ | $1/s$ |
| 2 | $t$ | $1/s^2$ |
| 3 | $t^2$ | $2!/s^3$ |
| 4 | $t^n$ $(n = 0, 1, \cdots)$ | $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ |
| 5 | $t^a$ ($a$ positivo) | $\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ |
| 6 | $e^{at}$ | $\dfrac{1}{s-a}$ |

| | $f(t)$ | $\mathcal{L}(f)$ |
|---|---|---|
| 7 | $\cos \omega t$ | $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| 8 | $\text{sen } \omega t$ | $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| 9 | $\cosh at$ | $\dfrac{s}{s^2-a^2}$ |
| 10 | $\text{senh } at$ | $\dfrac{a}{s^2-a^2}$ |
| 11 | $e^{at} \cos \omega t$ | $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$ |
| 12 | $e^{at} \text{ sen } \omega t$ | $\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ |

Boa sorte!