



Curitiba, 11.12.2015

Prova 2

Matemática Aplicada I

Tobias Bleninger

Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: _____

GRR: _____

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos obtidos	Pontos totais		
1		50		
2		15		
3		15		
4		10	Porcentagem	
Soma		90		Nota
Final (corrigido)				

Questões

- (50) Dado o problema $y'' - y' - 2y = 3te^t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$
 - Classifique a edo.
 - Calcule a solução analítica do problema transformando a edo obrigatoriamente em um sistema.

Solução:

a) edo2, linear, não homogêneo com coeficientes constantes

4P

b) Solução homogênea

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p = [y_h(t) \ y_h'(t)]^t + \mathbf{y}_p = [y_{1h}(t) \ y_{2h}(t)]^t + \mathbf{y}_p$$

Solução homogênea

$$\mathbf{y}_h = [y_h(t) \ y_h'(t)]^t = [y_{1h}(t) \ y_{2h}(t)]^t$$

$$\mathbf{y}_h' = [y_h'(t) \ y_h''(t)]^t = [y_{1h}'(t) \ y_{2h}'(t)]^t = [y_{2h}(t) \ (2y_{1h}(t) \ y_{2h}(t))]^t$$

em forma matricial:

$$\mathbf{y}_h' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1h}(t) \\ y_{2h}(t) \end{bmatrix}$$

6P

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)(1 - \lambda) - 2 = -\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$

$$\rightarrow (1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)})/2 = (1 \pm \sqrt{9})/2$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1:$$

10P

Autovetores correspondentes:

$$\lambda_1 = 2:$$

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 2\mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + x_2 = 2x_2 \rightarrow 2x_1 = x_2, x_2 = 1 \rightarrow x_1 = 2 \end{matrix}$$

$$\lambda_2 = -1:$$

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = -\mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_2 = -x_1 \\ 2x_1 + x_2 = -x_2 \rightarrow -2x_2 = 2x_1, x_2 = 1 \rightarrow x_1 = -1 \end{matrix}$$

10P

$$y_h = c_1 2e^{2t} - c_2 e^{-t}$$

Depois achar solução não homogênea

$$y_p = (at^2 + bt)e^t$$

$$y_p' = (2at + b)e^t + (at^2 + bt)e^t$$

$$y_p'' = 2ae^t + (2at + b)e^t + (2at + b)e^t + (at^2 + bt)e^t$$

$$2ae^t + (2at + b)e^t + (2at + b)e^t + (at^2 + bt)e^t - (2at + b)e^t + (at^2 + bt)e^t - 2(at^2 + bt)e^t = 3te^t$$

$$\rightarrow 2a + 2at + b = 3t$$

$$2a = 3 \rightarrow a = 1,5$$

$$3 + b = 0 \rightarrow b = -3$$

$$y_p = (1,5t^2 - 3t)e^t$$

10P

Solução geral

$$y = c_1 2e^{2t} - c_2 e^{-t} + (1,5t^2 - 3t)e^t$$

Cond. Iniciais:

$$y(0) = 2,$$

$$y(0) = c_1 2 - c_2 = 2 \rightarrow c_2 = 2c_1 - 2$$

$$y'(0) = c_1 4 + c_2 - 3 = 0 \rightarrow 4c_1 + 2c_1 - 2 - 3 = 6c_1 - 5 = 0 \rightarrow c_1 = 5/6, c_2 = 5/3 - 2 = -1/3$$

$$y = 5/3 e^{2t} + 1/3 e^{-t} + (1,5t^2 - 3t)e^t$$

10P

2. (15) Dado o problema $y' - 3x^2y = -4y^2 + 16$, $y(3) = 7$
- Classifique a edo.
 - Faça a discretização usando o método de Euler progressivo
 - Descreva o algoritmo para obter a solução numérica deste problema (em palavras, equações e/ou comandos de Matlab/Octave)

Solucao

a) Edo1, não linear, não homogêneo, com coeficientes não constantes

4P

b) $y' - 3x^2y = -4y^2 + 16$
 $y' = 3x^2y - 4y^2 + 16$
 $y' \approx (y_{i+1} - y_i)/\Delta x$
 $(y_{i+1} - y_i)/\Delta x = 3x_i^2y_i - 4y_i^2 + 16$
 $y_{i+1} = y_i + (3x_i^2y_i - 4y_i^2 + 16)\Delta x$

6P

c)

```
dx = 0.1;
x = [3:dx:8.0];
s = zeros(size(x));
s(1) = 7;
for i = 1:(length(x)-1)
s(i+1) = s(i) + dx * (3*x(i)^2*s(i) - 4*s(i)^2 + 16);
end
```

5P

3. (15) Escolhe um problema físico ou biológico ou químico que pode ser descrito com uma equação diferencial (por exemplo massa-mola, reações químicas, decaimento bacteriano, sedimentação de partícula, paraquedista, predador-presa, mistura em reator, pendulo) e
- Defina/deduz a equação matemática do problema e os seus parâmetros.
 - Classifique a equação
 - Faça a solução analítica e numérica (escolha livre) da equação.

Solucao:

a) $dC/dt = kC$ (decaimento bacteriano de primeira ordem com t =tempo, C =concentração, k = taxa de decaimento)

5P

b) edo1, lin., não hom. com coef. constantes

3P

c) $dC/C = k*dt \rightarrow \ln C = kt + co \rightarrow C = \exp(kt+co)$

5P

$$(C_{i+1} - C_i)/\Delta t = k*C_i$$

$$C_{i+1} = C_i + k*C_i\Delta t$$

2P

4. (10P) Avalie as frases seguintes, escrevendo se são verdadeiras ou falsas (*resposta certa: pontuação positiva; resposta errada: pontuação negativa; sem resposta: 0, pontuação mínima nesta questão: 0*):

a. "O método Runge-Kutta de primeira ordem é identico ao metodo Euler progressivo"



a afirmação é verdadeira

b. "A equação $3y' + 7 + xy = 0$ é classificada como equação diferencial ordinaria linear de primeira ordem e não-homogenea"



a afirmação é verdadeira

- c. "A equação $y(x)' - y(x) + y^2(x) = 0$ é definida uma equação diferencial autônoma, porque não aparece o parâmetro independente x explicitamente"

a afirmação é verdadeira

- d. "Métodos de soluções de EDOs por séries são especialmente recomendáveis para soluções de equações com coeficientes variáveis (sendo funções da variável independente)"

a afirmação é verdadeira

- e. "Uma grande vantagem da utilização do método das transformadas de Laplace na solução de equações diferenciais ordinárias é a possibilidade de poder resolver problemas com entradas não contínuas"

a afirmação é verdadeira