Curitiba, 20.12.2013

Prova Final

Matemática Aplicada I

Tobias Bleninger
Departamento de Engenharia Ambiental (DEA)
Centro Politécnico, Bloco V, Caixa Postal 19011, 81531-990, Curitiba - PR, Brasil

Nome: Gabarito

Pontuação (preenchido pelo Professor):

Questão	Pontos obtidos	Pontos totais		
1		25		
2		45		
3		10		
4		10		
5				
6			Porcentagem	
Soma				Nota
Final (corrigido)				

Questões

1. (25 P) Utilizando obrigatoriamente transformada de Laplace, resolva 3y'' + 2y' - 3y = δ(t), y(0) = 1, y'(0) = 0, onde δ(t) é a delta de Dirac.

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}\,dt = 1.$$

A transformada da equação diferencial inteira é

$$\begin{aligned}
3\left[s^2\overline{y} - sy(0) - y'(0)\right] + 2\left[s\overline{y} - y(0)\right] - 3\overline{y} &= 1,\\
3(s^2\overline{y} - s) + 2(s\overline{y} - 1) - 3\overline{y} &= 1,\\
3s^2\overline{y} - 3s + 2s\overline{y} - 2 - 3\overline{y} &= 1,\\
(3s^2 + 2s - 3)\overline{y} - 3s - 2 &= 1,\\
(3s^2 + 2s - 3)\overline{y} &= 3 + 3s,\\
\overline{y} &= \frac{3(s+1)}{3s^2+2s-3},\\
y(t) &= \frac{2}{\sqrt{10}}e^{-t/3}\,\mathrm{senh}\left(\frac{\sqrt{10}t}{3}\right) + e^{-t/3}\cosh\left(\frac{\sqrt{10}t}{3}\right)\\
&= \frac{\left(\left(\sqrt{10}+2\right)e^{\frac{2\sqrt{10}t}{3}} + \sqrt{10}-2\right)e^{-\frac{\sqrt{10}t}{3}-\frac{t}{3}}}{2\sqrt{10}}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Solução 1: 25 P

2. (45 P) Calcule analiticamente a solução da equação: y''' - y'' - 4y' + 4y + 4 = 0, condições iniciais y(0)= 1, y'(0)=1, y''(0)=0, transformando-a, obrigatoriamente, em um sistema de equações diferenciais e resolvendo o sistema.

Solução homogênea

$\mathbf{y} = [y(t)\ y'(t)\ y''(t)]^t = [y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t)]^t$

$\mathbf{y'} = [y'(t)\ y''(t)\ y'''(t)]^t = [y_1'(t)\ y_2'(t)\ y_3'(t)]^t = [y_2(t)\ y_3(t)\ (y_3(t) + 4y_2(t) - 4y_1(t))]^t$

em forma matricial:

$$\mathbf{y'} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -4 & 4 & 1 \end{matrix}\ \mathbf{y} \quad \mathbf{=} \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & y_1(t)\\ 0 & 0 & 1 & y_2(t)\\ -4 & 4 & 1 & y_3(t) \end{matrix}$$

$$A-\lambda I = \begin{matrix} -\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ -4 & 4 & 1-\lambda \end{matrix}$$

$\det(A-\lambda I) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

$= (-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) + (-4) + 0 - 0 - 4(-\lambda) - 0$

$= \lambda^2(1-\lambda) + 4\lambda - 4$

$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$

$\Rightarrow\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2$

Autovetores correspondentes:

$\lambda_1 = 1$:

$Ax = \lambda x$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -4 & 4 & 1 \end{matrix}\ \mathbf{x_1} \ \mathbf{= 1x_1} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{12} = x_{11}\\ x_{13} = x_{12}\\ -4x_{11} + 4x_{12} + x_{13} = x_{13} \end{matrix} \Leftrightarrow \mathbf{x_1} = \begin{matrix} 1\\ 1\\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -4 & 4 & 1 \end{matrix}\ \mathbf{x_2} \ \mathbf{= 2x_2} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{22} = 2x_{21}\\ x_{23} = 2x_{22}\\ -4x_{21} + 4x_{22} + x_{23} = 2x_{23} \end{matrix} \Leftrightarrow \mathbf{x_2} = \begin{matrix} 1\\ 2\\ 4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x_3} = -2\mathbf{x_3} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{32} = -2x_{31} \\ x_{33} = -2x_{32} \\ -4x_{31} + 4x_{32} + x_{33} = -2x_{33} \end{matrix} \Leftrightarrow \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{y_h} = c_1e^{\lambda 1t}\,\mathbf{x_1} + c_2e^{\lambda 2t}\,\mathbf{x_2} + c_3e^{\lambda 3t}\,\mathbf{x_3} = c_1e^{t}\,\mathbf{x_1} + c_2e^{2t}\,\mathbf{x_2} + c_3e^{-2t}\,\mathbf{x_3}$

$y_h(t) = y_1(t) = c_1e^{t} + c_2e^{2t} + c_3e^{-2t}$

Depois achar solução não homogênea
$y_p = ax + b$
$y_p' = a$, $y_p'' = 0$, $y_p''' = 0$
$\rightarrow 0 - 0 - 4a + 4(ax+b) + 4 = 0$
$\rightarrow 4ax - 4a + 4b + 4 = 0$
$\rightarrow 4a = 0 \rightarrow a=0$
$\rightarrow 4b + 4 = 0$
$\rightarrow b = -1$

Vetor da solução particular: $\mathbf{y_p} = \begin{matrix} y_p = -1 \\ y_p' = 0 \\ y_p'' = 0 \end{matrix}$

Solução geral
$\mathbf{y} = c_1e^{\lambda 1t}\,\mathbf{x_1} + c_2e^{\lambda 2t}\,\mathbf{x_2} + c_3e^{\lambda 3t}\,\mathbf{x_3} + y_p$

Cond. Iniciais:
$y(0) = c_1 + c_2 + c_3 - 1 = 1$
$y'(0) = c_1 + 2c_2 - 2c_3 = 1$
$y''(0) = c_1 + 4c_2 + 4c_3 = 0$

4*1-3: $3c_1 = 8 \Leftrightarrow c_1 = 8/3$
2*2-3: $8/3 - 8c_3 = 2 \Leftrightarrow c_3 = -1/12$
➔ $8/3 + c_2 - 1/12 - 1 = 1 \Leftrightarrow c_2 = -7/12$

$y(t) = 8/3e^{t} + -7/12e^{2t} - 1/12e^{-2t} - 1$

3. (10 P) Encontre a solução geral da equação de uma função complexa de uma variável complexa: $d^2u/dz^2 - 2i\, du/dz + i^2u = 0$

$\lambda^2 - 2i\lambda + i^2 = 0$
raiz dupla $\lambda = i$
solução geral $\mathbf{u(z) = (c_1 + c_2z)\, e^{iz}}$

Solução 10: 10 P

4. (10 P) Avalie as frases seguintes, escrevendo se são verdadeiras ou falsas (*resposta certa: pontuação positiva; resposta errada: pontuação negativa; sem resposta: 0, pontuação mínima nesta questão: 0)*:

   a. "A equacao y'-Ay = -By² é definido uma equação diferencial autonoma, porque não aparece o parametro independente t explicitamente"

      a afirmação é verdadeira

   b. "O metodo Euler reverso de resolver equacoes diferencias numericamente é um metodo implicito de primeira ordem"

      a afirmação é verdadeira

c. "O metodo Euler reverso é especialmente util para resolver equacoes diferencias rígidas com passos grandes"

a afirmação é falsa, porque Euler sendo de primeira ordem requer geralmente passos pequenos para obter melhores resultados

d. "O método Runge-Kutta sempre é mais preciso e mais rápido que o método de Euler"

a afirmação é falsa, porque não é mais rápido

e. "Uma edo com autovalores complexos sempre tem solucoes sendo funcoes complexas"

a afirmação é falsa, pode ter soluções reais tambem

Solução 14: 10 P

Equações dadas:

det (A_{3x3}) $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

Series de Frobenius:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r};$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1};$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}.$$

Derivadas das Transformadas de Laplace de uma função f(t)

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$$
$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

Algumas funções f(t) e suas Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	1	$1/s$
2	t	$1/s^2$
3	t^2	$2!/s^3$
4	t^n $(n = 0, 1, \cdots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
5	t^a (a positivo)	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
6	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
7	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
8	$\text{sen}\ \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9	$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
10	$\text{senh}\ at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
11	$e^{at} \cos \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
12	$e^{at}\ \text{sen}\ \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Boa sorte!